素粒子物理2

第2回

量子力学

南條　創

量子力学と粒子と相互作用

摂動論による遷移確率

(Fermi’s golden rule)

→粒子の崩壊

不確定性

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

- 位置と運動量→時間とエネルギー

不確定性

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

- 位置と運動量→時間とエネルギー

$$\frac{\Delta x}{v} \times vm\Delta v = \Delta t \Delta(\frac{1}{2}mv^2) = \Delta t \Delta E \sim \hbar$$

光量子(Einstein)

- エネルギーと周期

$$\epsilon T = h \to \epsilon = h\nu = \hbar\omega$$

  - 黒体輻射のスペクトラム
  - 光電効果

物質波(de Broglie)

- 運動量と波長

$$p\lambda = h \rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

波動関数、平面波

$$\Psi = A\exp\left[i\left(kx - \omega t\right)\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(px - Et\right)\right]$$

運動量がそのまま進行方向に見えるように

この決った運動量 p をもつ波は、空間全体に広がっている。粒子と思えるものはこの重ね合わせによる波束。空間的な広がりと運動量の広がりをあわせもつ。不確定性の反映。

演算子

$$\Psi = A \exp\left[i\left(kx - \omega t\right)\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(px - Et\right)\right]$$

$$p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

$$E = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

自由粒子のShrodinger方程式

$$\hat{E}\Psi = \hat{H}\Phi = \frac{\hat{p}^2}{2m}\Psi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi$$

これを解くことができる。

3次元自由粒子

a^3 の箱につき 1 個の規格化条件

$$\Psi = A \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)\right]$$

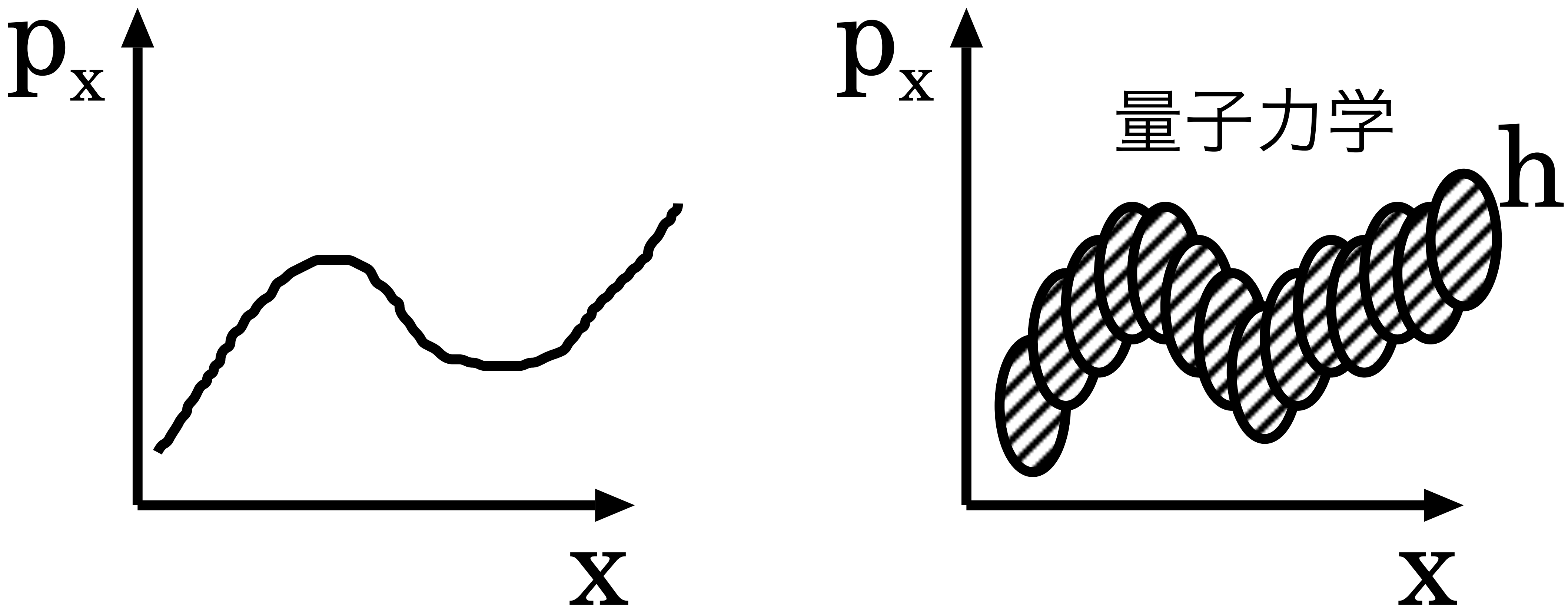
$$A^2 = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{V}$$

$$(p_x, p_y, p_z) = \frac{2\pi}{a}\hbar(n_x, n_y, n_z)$$

周期的境界条件から量子化される。

状態数 $\rightarrow dn = \dfrac{dp^3}{(2\pi\hbar/a)^3} = \dfrac{dp^3}{(2\pi)^3\hbar^3}V$

位相空間体積と状態数



$$dn = \frac{dp^3}{(2\pi\hbar/a)^3} = \frac{dp^3}{(2\pi)^3\hbar^3}V$$

d^3pV を h^3 の単位で数えている。$h \sim \Delta x \times \Delta p$ を考えると妥当

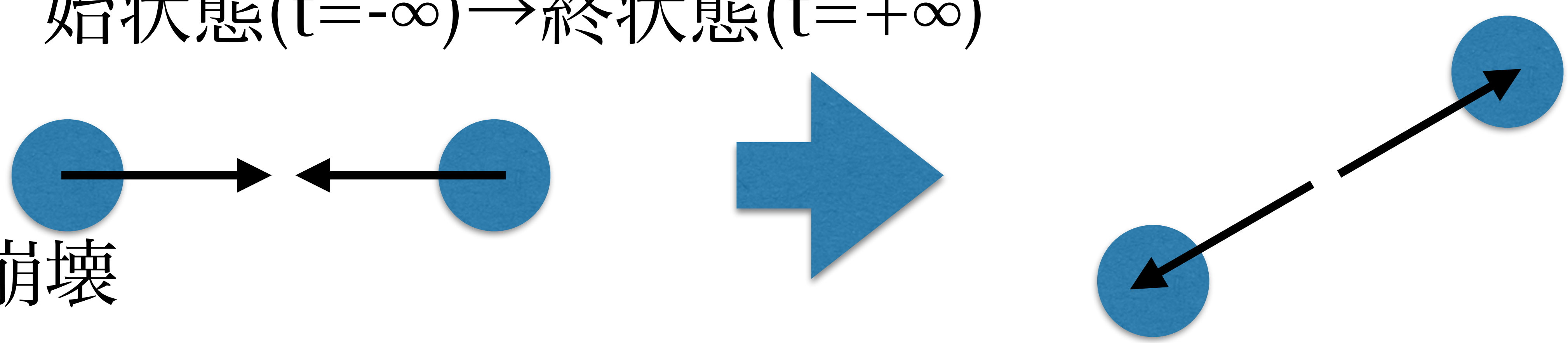
状態数が多いほど、そこに状態遷移しやすい

宿題1

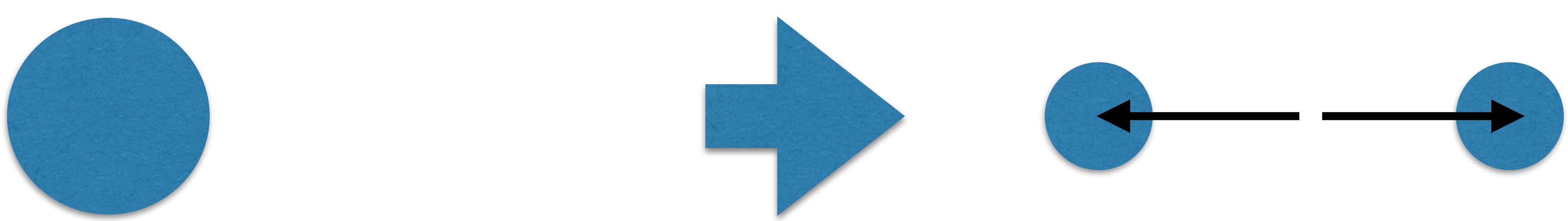
- 3次元自由粒子のShrodinger方程式を書け。
- 波動関数を求めよ。
- V=a×a×aのサイズに1粒子の規格化を行え。
- 状態数の運動量依存を示せ。

粒子と相互作用

- 今後通して取り扱うテーマ
- 散乱
  - 粒子+相互作用→時間発展→状態遷移確率
  - 始状態(t=-∞)→終状態(t=+∞)



- 崩壊
  - 粒子+相互作用→時間発展→状態遷移確率
  - 単位時間状態遷移確率Decay rate $\Gamma=1/\tau$（寿命）



粒子の崩壊

- Decay rate: $\Gamma = 1/\tau$　(τ :寿命)

$$dN = -\Gamma N dt \rightarrow N(t) = N_0 \exp(-\Gamma t) = N_0 \exp(-t/\tau)$$

量子力学では、確率保存より、粒子の崩壊は扱えない。

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = E_0 \phi$$

$$\phi(t) = \phi(0) \exp(-i \frac{E_0}{\hbar} t)$$

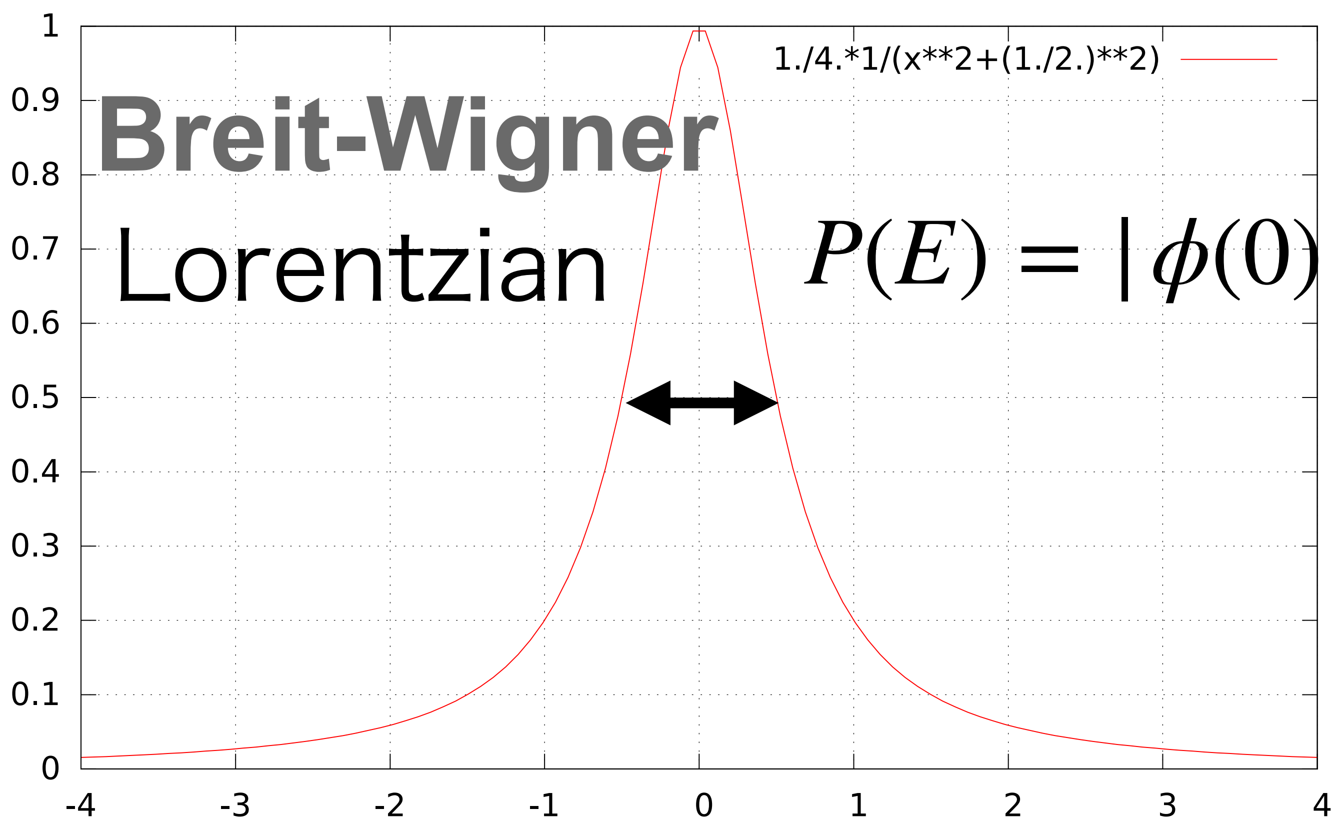
確率 $P = \phi(t)^* \phi(t) = |\phi(0)|^2$

崩壊幅 Γ

- 粒子の寿命 τ → $\Delta E \times \Delta t = \hbar \rightarrow \Gamma \equiv \Delta E = \dfrac{\hbar}{\tau}$
  - エネルギーも幅をもつ
  - Decay width 崩壊幅 Γ (eV)
  - Decay rate Γ (s^{-1})

$$\Gamma(\mathrm{s}^{-1}) = \frac{1}{\tau} \leftrightarrow \Gamma(\mathrm{eV}) = \frac{\hbar}{\tau}$$

-



$$P(E) = |\phi(0)|^2 \frac{\hbar}{2\pi} \frac{1}{(E - E_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

FWHM= Γ

量子力学では、確率保存より、粒子の崩壊は扱えない。

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = E_0\phi$$

$$\phi(t) = \phi(0)\exp(-i\frac{E_0}{\hbar}t)$$

$$確率\ P = \phi(t)^*\phi(t) = |\phi(0)|^2$$

そこでエネルギーの複素成分を追加して拡張する。

$$E_0 \to E = E_0 - i\frac{\Gamma}{2}$$

$$\phi(t) = \phi(0)\exp(-i\frac{E_0 - i\frac{\Gamma}{2}}{\hbar}t)$$

$$確率\ P = \phi(t)^*\phi(t) = |\phi(0)|\exp(-\frac{\Gamma}{\hbar}t)$$

このように寿命 $\tau = \Gamma/\hbar$ で崩壊する粒子。

$1/\tau = \Gamma/\hbar$ は単位時間あたりの遷移率 (transition rate=probability per unit time) で、decay rate と呼ばれる。Γ はエネルギーの幅で、width ともいう。その心を理解するには、上記の波動関数 $\phi(t)$ の、エネルギー固有値関数での重ねあわせ具合を調べる必要がある。(寿命をもつ粒子の Energy の広がり)

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dE\, \omega(E) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) \tag{101}$$

となる $\omega(E)$ がわかればよい。両辺に、

$$\int dt \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(+i\frac{E'}{\hbar}t\right) \tag{102}$$

をかける。

$$\text{右辺} = \int dt \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(+i\frac{E'}{\hbar}t\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dE\, \omega(E) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) \tag{103}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dE \int dt \, \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left(i\frac{E' - E}{\hbar}t\right) \omega(E) \tag{104}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dE \int dk \, \frac{1}{2\pi} \exp\big(i(E' - E)k\big) \, \omega(E) \tag{105}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dE\delta(E - E')\omega(E) = \omega(E') \tag{106}$$

よって、

$$\omega(E') = \int dt \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(+i\frac{E'}{\hbar}t\right) \phi(t) \tag{107}$$

$$= \int dt \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(+i\frac{E'}{\hbar}t\right) \phi(0) \exp\left(-i\frac{E_0 - i\frac{\Gamma}{2}}{\hbar}t\right) \tag{108}$$

$$= \int dt \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \phi(0) \exp\left(i\frac{(E' - E_0) + i\frac{\Gamma}{2}}{\hbar}t\right) \tag{109}$$

$$= \phi(0) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\hbar}{i(E' - E_0) - \frac{\Gamma}{2}} \tag{110}$$

$$|\omega(E')|^2 = |\phi(0)|^2 \frac{\hbar}{2\pi} \frac{1}{(E' - E_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \tag{111}$$

半値となる $\Delta E = E' - E0$ は、

$$\frac{1}{\Delta E^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} = \frac{1/2}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \tag{112}$$

$$\Delta E = \frac{\Gamma}{2} \tag{113}$$

$$\text{FWHM} = \Gamma \tag{114}$$

つまり、寿命 $\tau = \hbar/\Gamma$ の粒子は、幅 Γ のエネルギーの幅を持つ。崩壊幅,

崩壊分岐比と寿命

- いくつかの終状態
- Decay rate：Γi ：部分幅
- 寿命 τ ⇄全幅Γtot = Σ Γi

$$\Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots$$

- 崩壊分岐比 BRi

$$BR_i = \Gamma_i / \Gamma \text{tot}$$

Decay mode	Branching ratio
$K_L \to \pi^- e^+ \nu$	40 %
$K_L \to \pi^- \mu^+ \nu$	27 %
$K_L \to \pi^+ \pi^- \pi^0$	13 %
$K_L \to 3\pi^0$	20 %

粒子と相互作用

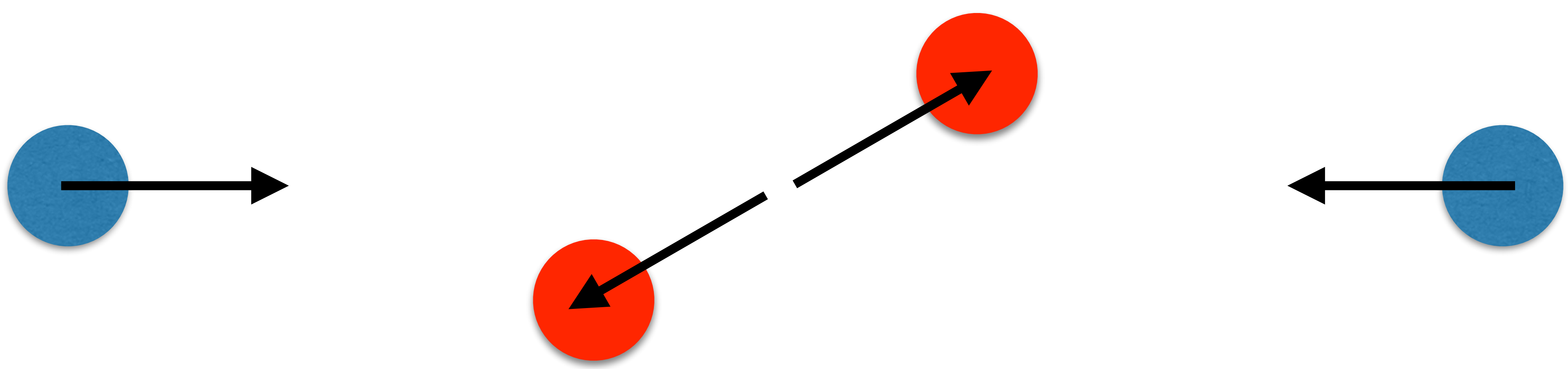
- 今後通して取り扱うテーマ
- 粒子+相互作用→時間発展→状態遷移確率
  - 始状態：自由粒子（平面波）
  - 相互作用：弱い→摂動として扱う
  - 終状態: 自由粒子（平面波)

量子力学 シュレディンガー方程式の自由粒子解 $(H_0(\mathbf{x}) = \hat{p}^2/(2m))$
相対論的量子力学

- spin:0$\cdots$ クラインゴルドン方程式の自由粒子解
- spin:1/2$\cdots$ ディラック方程式の自由粒子解
- spin:1$\cdots$ プロカ方程式の自由粒子解

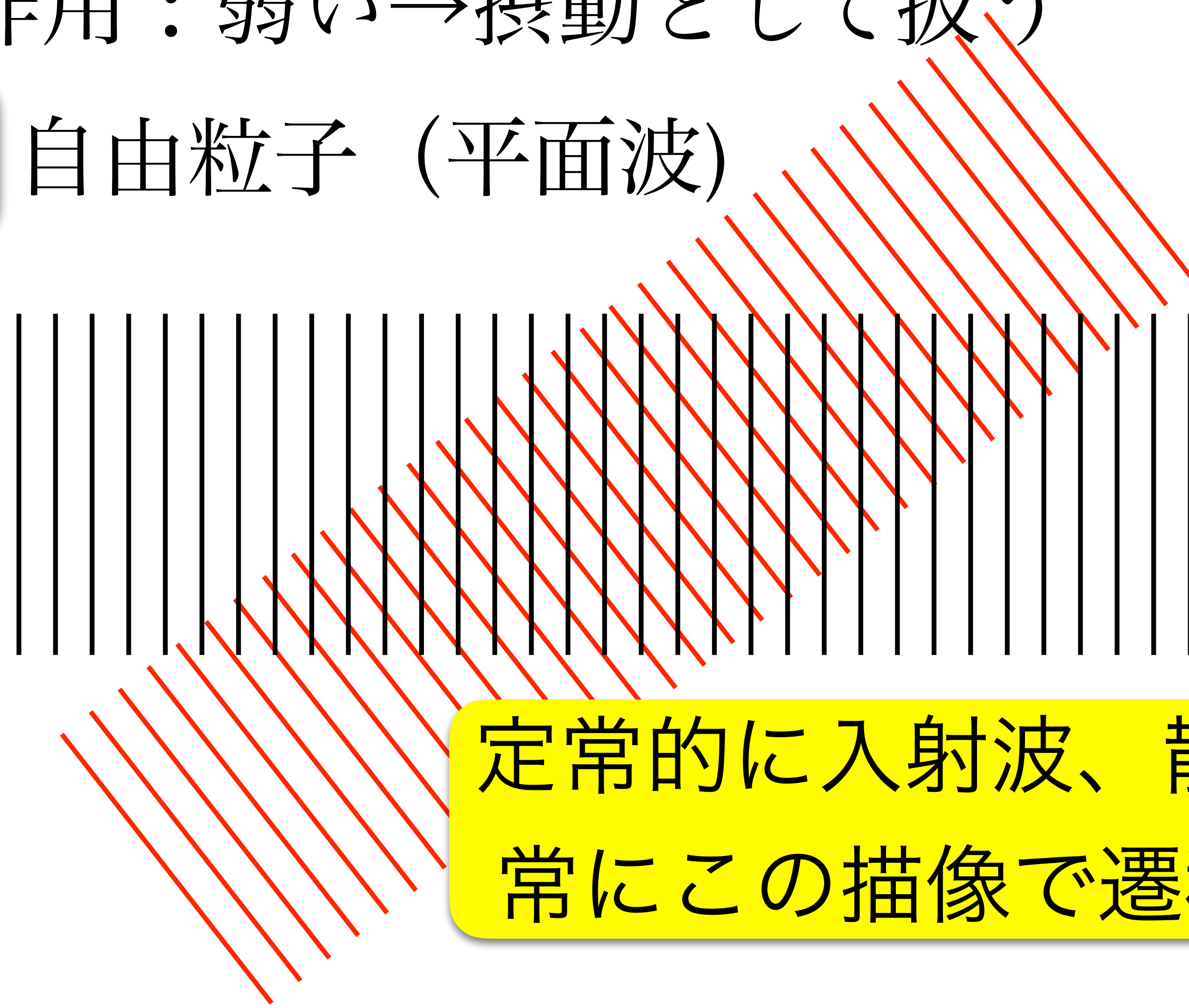
粒子と相互作用

- 今後通して取り扱うテーマ
- 粒子+相互作用→時間発展→状態遷移確率
  - 始状態：自由粒子
    - 相互作用：弱い→摂動として扱う
  - 終状態:自由粒子



粒子と相互作用

- 今後通して取り扱うテーマ
- 粒子+相互作用→時間発展→状態遷移確率
  - 始状態：自由粒子（平面波）→空間に広がる
    - 相互作用：弱い→摂動として扱う
  - 終状態: 自由粒子（平面波)



定常的に入射波、散乱波/崩壊波
常にこの描像で遷移確率を計算

始状態/終状態

時間に依存しない $\hat{H}_0(\mathbf{x})$

$$
\begin{aligned}
\hat{E}\psi =& \hat{H}_0\psi \\
\psi_x\hat{E}\psi_t =& \psi_t\hat{H}_0\psi_x (\text{時間非依存で変数分離}) \\
\frac{1}{\psi_t}\hat{E}\psi_t =& \frac{1}{\psi_x}\hat{H}_0\psi_x \equiv E
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi_t = E\psi_t \to \psi_t = \exp(-iEt) \\
\hat{H}_0\psi_x = E\psi_x \cdots E_k \to \phi_k
\end{cases}
$$

$$
\psi_k = \phi_k(\mathbf{x})\exp(-iE_k t)(\text{時間部分は決まる。})
$$

このように固有関数が求まる。 $\boldsymbol{\phi_k(\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{p}_k\mathbf{x})}$

$$
\Psi = A\exp\left[i\left(kx - \omega t\right)\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right]
$$

Fermi's golden rule

- 単位時間あたりの遷移確率 Γfi
- 終状態の状態密度 nf
- Transition Matrix Element 遷移行列要素
  - 波動関数のオーバーラップ

$$d\Gamma_{fi} = P_{fi}/T = |T_{fi}/\hbar|^2 (2\pi\hbar)\delta(E_f - E_i) \times dn_f$$

$$\Gamma_{fi} = \int_{\text{all the final stats}} |T_{fi}/\hbar|^2 (2\pi\hbar)\delta(E_f - E_i) \times dn_f$$

$$T_{fi} = < f|H_I|i >$$

時間依存の相互作用 $H_I(\mathbf{x},\mathbf{t})$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left(\hat{H}_0+\hat{H}_I(\mathbf{x},t)\right)\psi$$

これの時間発展を解けばよい。ψ を自由粒子解の線形結合で書く。

$$\psi(\mathbf{x},t)=\sum_k c_k(t)\psi_k(\mathbf{x},t)$$

$c_k(t)$ の時間発展がわかればよい。

それでは実際にこれを代入して、$c_k(t)$ の満たすべき式を見てみよう。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sum_k c_k(t)\psi_k(\mathbf{x},t) = \left(\hat{H}_0 + \hat{H}_I(\mathbf{x},t)\right)\sum_k c_k(t)\psi_k(\mathbf{x},t) \tag{126}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sum_k c_k(t)\phi_k(\mathbf{x})\exp(-iE_kt) = \left(\hat{H}_0 + \hat{H}_I(\mathbf{x},t)\right)\sum_k c_k(t)\phi_k(\mathbf{x})\exp(-iE_kt) \tag{127}$$

$$\sum_k\left\{\begin{array}{r} i\hbar\left(\dfrac{\partial c_k(t)}{\partial t}\right)\phi_k(\mathbf{x})\exp(-iE_kt) \\ +ic_k(t)\phi_k(\mathbf{x})(-iE_k)\exp(-iE_kt)\end{array}\right\} = \sum_k\left\{\begin{array}{r} c_k(t)E_k\phi_k(\mathbf{x})\exp(-iE_kt) \\ +\hat{H}_I(\mathbf{x},t)c_k(t)\phi_k(\mathbf{x})\exp(-iE_kt)\end{array}\right\} \tag{128}$$

$$\sum_k i\hbar\left(\frac{\partial c_k(t)}{\partial t}\right)\phi_k(\mathbf{x})\exp(-iE_kt) = \sum_k \hat{H}_I(\mathbf{x},t)c_k(t)\phi_k(\mathbf{x})\exp(-iE_kt) \tag{129}$$

ここで、H_I が十分小さな摂動で、初期状態が E_i の固有状態とするの割合がほぼ 1 で他は 0 ですね。

$$c_k(t) \sim \begin{cases} 1\,(k=i) \\ 0\,(k \neq i) \end{cases}$$

すると、

$$\sum_k i\hbar \left(\frac{\partial c_k(t)}{\partial t} \right) \phi_k(\mathbf{x}) \exp(-iE_k t) \sim \hat{H}_I(\mathbf{x}, t)\phi_i(\mathbf{x}) \exp(-iE_i t)$$

ある特定の終状態 $\phi_f(\mathbf{x})$ について知りたければ、両辺に、

$$\int_V dx \phi_f^*(\mathbf{x}) \exp\left(+iE_f t\right)$$

を作用させるとよいだろう。左辺は、固有関数の直交条件から、

$$\begin{aligned} 左辺 =& \int_V dx \phi_f^*(\mathbf{x}) \exp\left(+iE_f t\right) i\hbar \left(\frac{\partial c_f(t)}{\partial t} \right) \phi_f(\mathbf{x}) \exp(-iE_f t) \\ =& i\hbar \left(\frac{\partial c_f(t)}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

右辺は、始状態終状態で H_I を挟むようになる。

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \int_V dx\phi_f^*(\mathbf{x}) \exp\left(+iE_f t\right) \hat{H}_I(\mathbf{x},t)\phi_i(\mathbf{x}) \exp(-iE_i t) && (137)\\
&= \int_V dx\phi_f^*(\mathbf{x})\hat{H}_I(\mathbf{x},t)\phi_i(\mathbf{x}) \exp\left(i(E_f - E_i)t\right) && (138)\\
&= < f|\hat{H}_I|i > \exp\left(i(E_f - E_i)t\right) && (139)\\
&\equiv T_{fi} \exp\left(i(E_f - E_i)t\right) && (140)
\end{aligned}$$

$T_{fi} =< f|H_I|i >$ という transition matrix element が出る。これは" 空間部分" の波動関数オーバーラップに相当する。

$$i\hbar\left(\frac{\partial c_f(t)}{\partial t}\right) = < f|\hat{H}_I|i > \exp\left(i(E_f - E_i)t\right) \equiv \quad T_{fi} \exp\left(i(E_f - E_i)t\right) \tag{141}$$

$$\frac{\partial c_f(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} T_{fi} \exp\left(i(E_f - E_i)t\right) \tag{142}$$

$$\tag{143}$$

この微分を解いて、T 後の c_f は、

$$c_f(T) = -\, iT_{fi}/\hbar \int_0^T dt\ \exp\left(i(E_f - E_i)t\right) \tag{144}$$

これから、T 後に状態 f にいる確率 P_{fi} は、

$$P_{fi} = c_f^* c_f \tag{145}$$

$$= |T_{fi}/\hbar|^2 \int_0^T dt\ \exp\left(-i(E_f - E_i)t\right) \int_0^T dt'\ \exp\left(i(E_f - E_i)t'\right) \tag{146}$$

$$\tag{147}$$

ここで次の変数変換をして対称化する。exp 部にでる $T/2$ のお釣りは、双方でキャンセル。

$$t \to t - T/2 \tag{148}$$

$$t' \to t' - T/2 \tag{149}$$

$$= |T_{fi}/\hbar|^2 \int_{-T/2}^{T/2} dt\ \exp\left(-i(E_f - E_i)t\right) \exp\left(-i(E_f - E_i)(-T/2)\right) \tag{150}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt'\ \exp\left(i(E_f - E_i)t'\right) \exp\left(i(E_f - E_i)(-T/2)\right) \tag{151}$$

$$=|T_{fi}/\hbar|^2 \int_{-T/2}^{T/2} dt\ \exp\left(-i(E_f - E_i)t\right) \int_{-T/2}^{T/2} dt'\ \exp\left(i(E_f - E_i)t'\right) \tag{152}$$

$$=|T_{fi}/\hbar|^2 \int_{-T/2}^{T/2} dt\ \exp\left(-i(E_f - E_i)t\right)(2\pi\hbar)\delta(E_f - E_i) \tag{153}$$

$$=|T_{fi}/\hbar|^2 T(2\pi\hbar)\delta(E_f - E_i) \tag{154}$$

$\hbar\delta(E_f - E_i) = \delta((E_f - E_i)/\hbar)$ であることから、$(2\pi\hbar)$ の係数になる。これと取りうる状態数 dn_f を使って、probablitliy per unit time を計算、

$$d\Gamma_{fi} = P_{fi}/T = |T_{fi}/\hbar|^2(2\pi\hbar)\delta(E_f - E_i) \times dn_f \tag{155}$$

$$\Gamma_{fi} = \int_{\text{all the final stats}} |T_{fi}/\hbar|^2(2\pi\hbar)\delta(E_f - E_i) \times dn_f \tag{156}$$

これが Fermi's golden rule。すべての終状態について、エネルギー保存を課しながら、|transition matrix element|^2 を足し上げる。[1]

崩壊

$A \to 1+2+\cdots+n$ という崩壊を考える。decay rate は、運動量保存の拘束があるので自由に動かせる p は $n-1$ 個。n-1 粒子の終状態すべてをカウントする。

$$\Gamma_{fi} = \int (2\pi\hbar)|T_{fi}/\hbar|^2 \delta(E_f - E_i) dn_f \tag{161}$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \int | < 1, 2, \cdots, n|H_I|A > |^2 \tag{162}$$

$$\times (2\pi\hbar)\delta(E_A - E_1 - E_2 - \cdots E_n) \tag{163}$$

$$\times \frac{dp_1^3 V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp_2^3 V}{(2\pi\hbar)^3} \cdots \frac{dp_{(n-1)}^3 V}{(2\pi\hbar)^3} \tag{164}$$

A　簡単な δ-function

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx)\,dk = \frac{1}{ix}\left[\exp(ikx)\right]_{-\infty}^{+\infty} \tag{618}$$

$$= \frac{1}{ix}\left[\exp(inx) - \exp(-inx)\right] \tag{619}$$

$$= \frac{2}{x}\sin(nx) \tag{620}$$

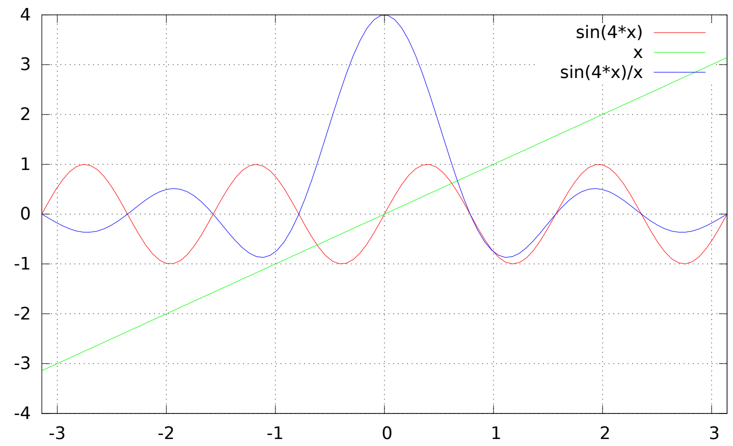


図 12: Delta function.

- $\sin(nx)$: $-\frac{\pi}{2n} : +\frac{\pi}{2n}$ の間、$y \sim nx$
- x: $y = x$
- $\frac{2}{x}\sin(nx) \sim 2n$

$$\text{Area} \sim \frac{\pi}{n} \times 2n = 2\pi \tag{621}$$

B 厳密な δ-function

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx)\, dk = 2\pi\delta(x)$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{+n} \exp(ikx)\, dk \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{ix} \exp(ikx) \right]_{-n}^{+n} \end{aligned}$$

$$=\frac{2}{x}\frac{\exp(inx)-\exp(-inx)}{2i} \tag{625}$$

$$=\frac{2}{x}\sin(nx) \tag{626}$$

これはδ関数のようだが、この x 積分はいくらか?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\sin(nx)}{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} dX\,\frac{\sin(X)}{X} \tag{627}$$

$$=\Im\int_{-\infty}^{+\infty} dz\,\frac{e^{iz}}{z} \tag{628}$$

$$\tag{629}$$

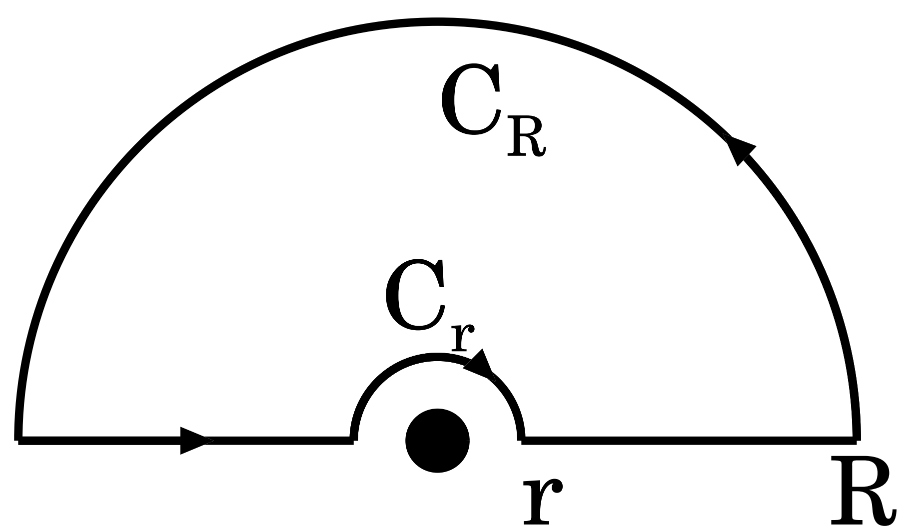


図 13: Integration path.

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{-R}^{-r} + \int_{r}^{R} + \int_{C_r} + \int_{C_R} \\
&= \int_{-R}^{-r} + \int_{r}^{R} + \int_{C_r} + \int_{C_R} \\
&= \int_{r}^{R} dx \frac{-e^{-ix}}{x} + \int_{r}^{R} dx \frac{e^{ix}}{x} + \int_{C_r} + \int_{C_R} \\
&= \int_{r}^{R} dx 2i \frac{\sin(x)}{x} + \int_{C_r} + \int_{C_R} \\
&= \int_{r}^{R} dx 2i \frac{\sin(x)}{x} + \int_{\pi}^{0} \frac{\exp(ir(\cos\theta + i\sin\theta))}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\
&\to \int_{0}^{\infty} dx 2i \frac{\sin(x)}{x} - i\pi \\
& \int_{0}^{\infty} dx \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2} \\
& \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(x)}{x} = \pi
\end{aligned}
$$

宿題2

- Fermi’s golden ruleを自分でもまとめてみよう。
- デルタ関数と積分の関係をまとめよ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx)\, dk = 2\pi\delta(x)$$