素粒子物理2

第１回

特殊相対論と量子力学

南條　創

素粒子物理2

- 授業の目標
  - 相対論的量子論
  - 電磁気
  - 弱い相互作用
  - 電弱相互作用とヒッグス粒子
  - ファイマンダイアグラムの計算
- 成績
  - レポートと出席
  - 試験（可能な限り）

第 1 回

- 特殊相対論と量子力学

素粒子物理学

- 構成要素…物質は何からできているか？
- 相互作用…力は何か？
  - 電磁気、弱い力、強い力、重力

実験

- モデル…相対論的量子論を基礎
  - 特殊相対論：high energy
  - 量子力学　：microscopic
- 実験と比較→尤もらしいか？

研究材料

- 散乱…粒子同士を衝突
  - fixed target or collider
- 崩壊
- 束縛状態

始状態から終状態への遷移確率を計算

単位

- 自然単位系(natural unit)
  - $c = 3 \times 10^8\,(\mathrm{m/s}) \rightarrow 1$
  - $\hbar \rightarrow 1$
- Hevisied-Lorentz
  - $\epsilon_0 = 1 \rightarrow \mu_0 = 1\,(c = 1)$

$$\alpha \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c}\,(\text{SI unit}) \rightarrow \frac{e^2}{4\pi}$$

$$e = 1.6 \times 10^{-19}(\mathrm{C})$$

電気素量 e の再定義

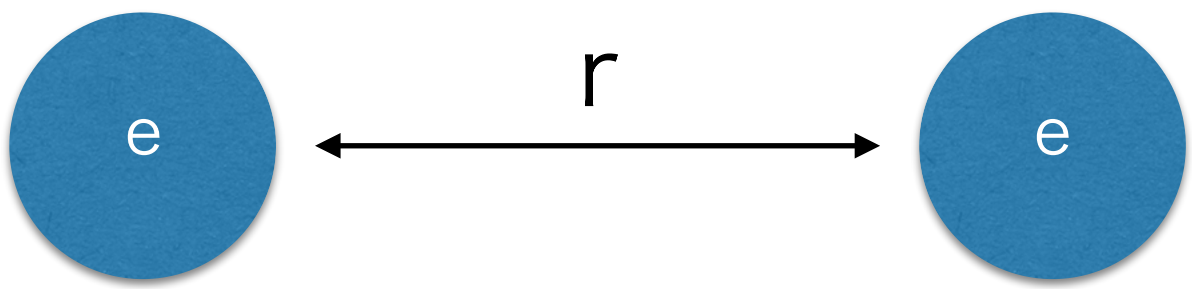
プランク定数

$$\hbar c = 197(\mathrm{MeVfm}) = 197(\mathrm{eVnm})$$

原子核: fmスケール: MeVスケール
原子: nmスケール: eVスケール

微細構造定数 α の意味

- ある距離の電荷→静電エネルギー v.s.量子ゆらぎ



$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

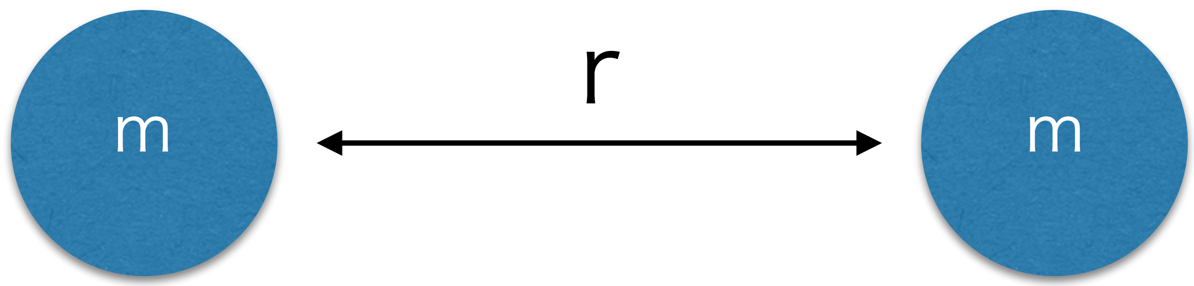
$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \rightarrow \Delta E = \frac{\hbar c}{r}$$

$$\alpha \equiv \frac{U}{\Delta E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

電磁気エネルギーは量子ゆらぎより小さい
→摂動として扱うことができる

プランクエネルギー

- 重量相互作用 ~ 量子ゆらぎ

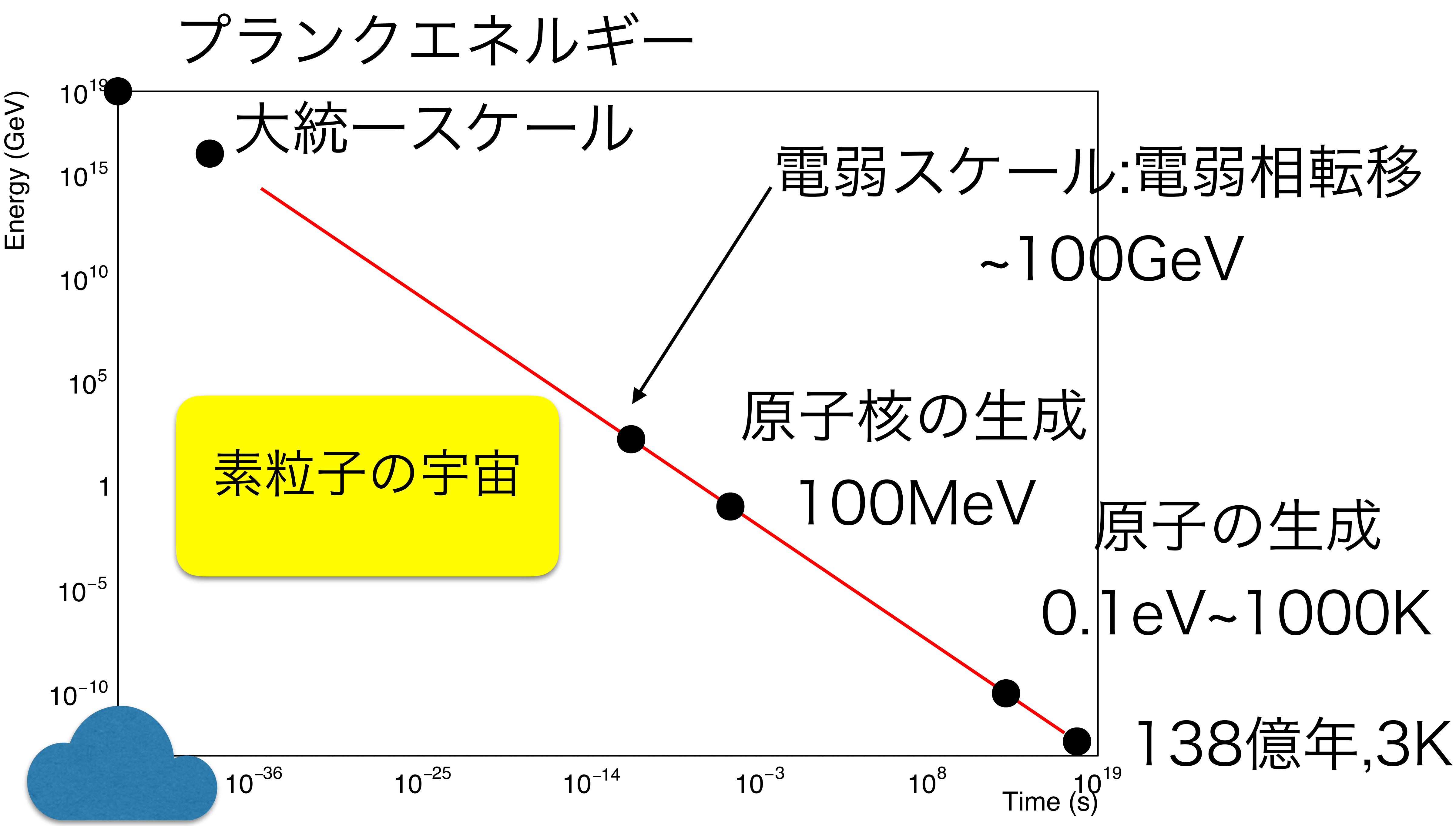


$$G\frac{m^2}{\hbar c} = 1 \rightarrow m = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

$$E_{pl} = mc^2 = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1.2 \times 10^{19}\,\mathrm{GeV}$$

プランクエネルギー:$1.2{\times}10^{19}$ GeV
量子論的重力理論が必要

宇宙の歴史



プランクエネルギー
大統一スケール
電弱スケール:電弱相転移
~100GeV
原子核の生成
100MeV
原子の生成
0.1eV~1000K
138億年,3K
素粒子の宇宙
Energy (GeV)
10^{19}
10^{15}
10^{10}
10^{5}
1
10^{-5}
10^{-10}
10^{-36}
10^{-25}
10^{-14}
10^{-3}
10^{8}
10^{19}
Time (s)

覚えておくべき数値

$$c = 3 \times 10^8\,(\mathrm{m/s})$$

$$e = 1.6 \times 10^{-19}(\mathrm{C})$$

$$\hbar c = 197(\mathrm{MeVfm}) = 197(\mathrm{eVnm})$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

$$E_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1.2 \times 10^{19}\,\mathrm{GeV}$$

$$25(\mathrm{meV}) = k_B \times 293(\mathrm{K})$$

$$1(\mathrm{year}) = 3.14 \times 10^7(\mathrm{s})$$

覚えておくべき質量

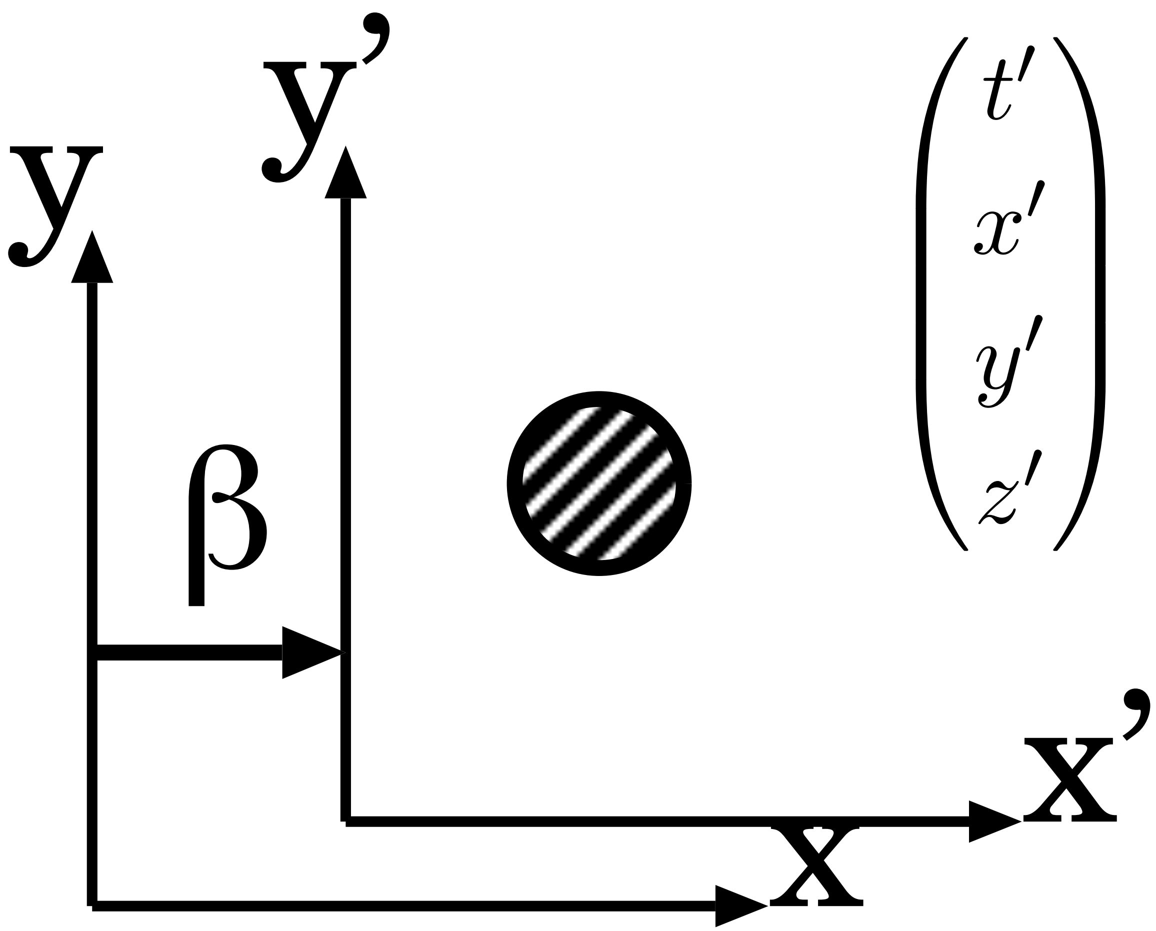
電子	e	0.511	MeV
ミュー	μ	106	MeV
タウ	τ	1777	MeV
陽子	p	938	MeV
中性子	n	940	MeV
top	t	172	GeV
W	W^+/W^-	80	GeV
Z	Z	91	GeV
H	H	125	GeV

パイ	π^0	135	MeV
	π^+/π^-	140	MeV

u	c	t
d	s	b

特殊相対論

ローレンツ変換



$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\beta \equiv \frac{v}{c}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- non-prime系: 速度vで移動するprime系
- 垂直な方向は何も変化しない

例題

- (1)原点に静止している質点 (t,0,0,0)
  - 速度v_xで動く観測者: プライム系
  - プライム系ではどう見える？
  - tの時刻に対応するプライム系での時刻は？
- (2)静止している長さLの棒 (t,0,0,0) — (t,L,0,0)
  - 速度v_xで動く観測者：プライム系
  - プライム系でどう見える？
  - プライム系での棒の長さは？

解答

- (1)：同じ現象がより時間がかかる

$$(t, 0, 0, 0) \to (\gamma t, -\gamma\beta t, y, z,)$$

$$t' = \gamma t$$

- 静止μの寿命2.2μs →動いていると寿命がγ倍

- (2)ローレンツ短縮

$$L' = \frac{L}{\gamma}$$

ローレンツブースト

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & & \\ \gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- β →(- β)：観測者を- β ：物体が β で動く

固有時間(proper time)

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$$

- 固有時間を定義
  - 同じ現象をプライム系で観測
  - 固有時間は不変

$$d\tau' = dt'/\gamma = \gamma dt/\gamma = dt/1 = d\tau$$

ローレンツ不変量

- c不変、固有時間dτ不変→cdτも不変

$$
\begin{aligned}
ds &= c\, d\tau \\
ds^2 &= c^2\, d\tau^2 \\
&= c^2 \frac{1}{\gamma^2} dt^2 \\
&= c^2 (1-\beta^2) dt^2 \\
&= dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \text{不変}
\end{aligned}
$$

$$
t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2
$$

4-velocity

$$\text{4-velocity:}\ \eta = \frac{dx}{d\tau} = (dt/d\tau, d\mathbf{x}/d\tau) = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta})$$

- x:座標→ローレンツ変換
- dτ不変量で割る→同じローレンツ変換で変換
- 4-velocityに対するローレンツ不変量は？

4 -momentum

4-momentum: $p = m\dfrac{dx}{d\tau} = (m dt/d\tau, m d\mathbf{x}/dt) = (\gamma m, \gamma \boldsymbol{\beta} m)$

- 4-velocity：ローレンツ変換
- 4-momentum：同じローレンツ変換で変換
- 4-momentumの第0成分の意味？

4 -momentum

4-momentum: $p = m\dfrac{dx}{d\tau} = (m\,dt/d\tau, m\,d\mathbf{x}/dt) = (\gamma m, \gamma\boldsymbol{\beta} m)$

- 4-velocity : ローレンツ変換
- 4-momentum : 同じローレンツ変換で変換

4-momentum の 0 成分の意味

$$p_0 = \gamma m = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} m$$
$$\sim \left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right) m = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$p = (E, \mathbf{p}) = (\gamma m, \gamma\beta m)$$

ローレンツ不変量？

m=0ではどうか？

4 -momentum

4-momentum: $p = m\dfrac{dx}{d\tau} = (m dt/d\tau, m d\mathbf{x}/dt) = (\gamma m, \gamma \boldsymbol{\beta} m)$

- 4-velocity：ローレンツ変換
- 4-momentum：同じローレンツ変換で変換

4-momentum の 0 成分の意味

$$p_0 = \gamma m = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} m$$
$$\sim \left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right) m = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$p = (E, \mathbf{p}) = (\gamma m, \gamma \beta m)$$

ローレンツ不変量？ $E^2 - p^2 = m^2$

m=0ではどうか？ $E = p$

テンソル記法

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

反変ベクトル

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t}$$

変換係数の微分の上下関係

反変ベクトル

共変ベクトル

先のローレンツ変換を満たす(t,x,y,z)に対し、

$$\begin{pmatrix} t' \\ -x' \\ -y' \\ -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & & \\ \gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = (\Lambda_{\mu}^{\ \nu})^{-1} \begin{pmatrix} t \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

変換行列の要素は、$\frac{\partial t}{\partial t'}$ などで決まり、共変ベクトル

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}$$

$$x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\ \nu} x_{\nu}$$

$$x_{\nu} \equiv \begin{pmatrix} t \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

さらに、反変、共変ベクトルは計量行列で以下のように接続。

$$x_\mu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} x^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu$$

これを使うとローレンツ不変量は、

$$\text{ローレンツ不変} = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\nu x^\nu$$

4-derivative

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t'} = \dfrac{\partial t}{\partial t'}\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial x}{\partial t'}\dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial x'} = \dfrac{\partial t}{\partial x'}\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial x}{\partial x'}\dfrac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu})^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ 共変ベクトル}$$

$$\partial_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$$

このように共変ベクトルであることに注意する。

$$\partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

宿題

1. 運動量 $p = 1(\mathrm{GeV/c})$ のK_L 中間子が、15m 先の 2m 長の検出器内部で崩壊する確率は？
(
K_L の質量 $m \sim 0.5(\mathrm{GeV})$、寿命 $c\tau \sim 15(\mathrm{m})$)

2. 荷電パイの崩壊 $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ を使って、ν_μ の質量を 10%の精度で求めるのに必要となる μ のエネルギー測定精度は？
($m_{\pi^+} = 140(\mathrm{MeV}),\ m_\mu = 105(\mathrm{MeV})$)

3. 中性パイの崩壊 $\pi^0 \to 2\gamma$ を考える。π^0 の運動エネルギーが 135(MeV) の時 2γ の開き角の最大値は？その開き角の分布は？
($m_{\pi^0} = 135(\mathrm{MeV})$)