

素粒子物理学 I,II 演習問題解答例

長島 順清

2003 年 4 月 6 日作製

October 14, 2003 更新
はじめに

拙著;素粒子物理学 I,II の演習問題には解答が付いていません。解答を付けると問題を熟考しないのではないかと思ひ、最初あえて付けなかったのですが、独習する読者の方からやはり欲しいとのご要望があり、遅蒔きながら解答例を出すことにしました。これが唯一の方法ではありませんし間違いも見つかると思いますが、お役に立てれば幸いです。判らないときや疑問があるときは気軽に nagay@snow.dti2.ne.jp にメールを下さい。可能な限り対応するつもりです。

なお、書面の関係から、第 8 章以下、素粒子物理学 II の演習問題解答例は、素粒子物理学 I と切り離して

<http://osksn2.hep.sci.osaka-u.ac.jp/~naga/works/solutions8-12/solutions8-12.html> に置きました。

2 粒子と場

2.2

フーリエ変換を使う。

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \phi(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{p} \\ \delta^3(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{p}\end{aligned}$$

を使えば、式 (2.37) は

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}^2 + \mu^2)\phi(\mathbf{p}) &= g \\ \therefore \phi(\mathbf{r}) &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{\exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{\mathbf{p}^2 + \mu^2} d\mathbf{p} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{ipr}}{p^2 + \mu^2} 2\pi dz p^2 dp \\ &= \frac{g}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p e^{ipr}}{p^2 + \mu^2} dp \\ &= \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r}\end{aligned}$$

最後の式を導くとき、 p の複素平面の上半面で積分路を閉じて、コーシーの積分定理を使った。

2.4

式 (2.38) から

$$mc^2 = \frac{\hbar c}{r_0} < \frac{200 \text{ MeV} f m}{10^4 \times 10^{16} m} = 2 \times 10^{-27} eV$$

注：本文の記述はやや不正確である。銀河内磁場は観測されていて、銀河間磁場も示唆されている。しかし、本文の論法が成立するのは同一発生源を持つ磁場の広がりである。例えば蟹座星雲の光は偏光していることが知られており、磁場によるシンクロトロン放射光と見なされている。こうしたコヒーレントな磁場の広がりは何百光年であり、上の値は二桁ほど過大評価となる。

2.5 まず、 $L^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ と書けることをまず頭に置いた上で、恒等式 $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu$ を書き直す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} &= \delta_\nu^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \\ \therefore \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} &= [L^{-1}]^\mu{}_\nu = M^\mu{}_\nu \\ \partial'_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = M^\nu{}_\mu \partial_\nu \end{aligned}$$

すなわち、 ∂'_μ は、共変ベクトルである。

2.6

$$A'^\mu B'_\mu = L^\mu{}_\rho A^\rho M^\sigma{}_\mu B_\sigma = (L^\mu{}_\rho [L^{-1}]^\sigma{}_\mu) A^\rho B_\sigma = \delta_\rho^\sigma A^\rho B_\sigma = A^\rho B_\rho$$

2.7

題意から、

$$\begin{aligned} A'^\mu B'_\mu &= L^\mu{}_\sigma A^\sigma B'_\mu = A^\sigma B_\sigma \\ \therefore L^\mu{}_\sigma B'_\mu &= B_\sigma \end{aligned}$$

左から、 $M^\sigma{}_\rho = [L^{-1}]^\sigma{}_\rho$ を掛けると

$$B'_\rho = M^\sigma{}_\rho B_\sigma$$

すなわち、 B'_μ は共変ベクトルである。

2.8

$$d^4 x' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^4} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x'^4}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x'^4}{\partial x^4} \end{vmatrix} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \det \mathbf{L} d^4 x = d^4 x$$

$$p^2 = p^{02} - (\mathbf{p}^2 + m^2), \quad \delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} \{ \delta(x - a) + \delta(x + a) \} \text{ を使え。}$$

2.9

$L_i = \sigma_i/2$, $N_i = i\sigma_i/2$ が、(2.63) の交換関係を満たすことは容易に証明できる。従って (2.66) 式で定義される $M_{\mu\nu}$ は、ローレンツ変換演算子としての必要条件をみたす。

2.10

微少変換について、式 (2.58) は

$$x'^\mu = (\mathbf{1}^\mu{}_\nu + \delta\theta_1 \mathbf{I}_1^\mu{}_\nu) x^\nu, \quad \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と書き直せる。y 軸、z 軸周りの微少回転に対しても同様な $\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$ が定義できる。一般に $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 方向軸周りの微少角 $\delta\theta$ 回転は、x 軸、y 軸、z 軸周りの微少角回転 $(\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3) = \delta\theta(n_1, n_2, n_3)$ の重ね合わせで与えられ、

$$x'^\mu = \left(\mathbf{1} + \sum_{i=1}^3 \delta\theta_i \mathbf{I}_i \right)^\mu{}_\nu x^\nu$$

となる。(2.57) から得られるローレンツブーストも含めれば、(2.67b) を得る。なお、(2.67c) の関係式は (2.67b) を使わずとも、(2.67a) および (2.67a) から導かれる $[L^{-1}]^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \varepsilon^\mu{}_\nu$ に、(2.48) 式を使えば一般的に導ける。

2.11

$$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta L^\rho{}_\gamma L^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \det \mathbf{L} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

すなわち、 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ はローレンツ変換で自分自身に変換するテンソルである。

2.12

電子の古典半径は $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.818 \times 10^{-15} m$

2.13

$$\begin{aligned} |v_e(t)\rangle &= \cos\theta |v_1(t)\rangle + \sin\theta |v_2(t)\rangle \\ &= \cos\theta |v_1(0)\rangle e^{-iE_1 t} + \sin\theta |v_2(0)\rangle e^{-iE_2 t} \end{aligned}$$

$v_e \rightarrow v_\mu$ 遷移確率は左から $\langle v_\mu(0) |$ を掛けて

$$\langle v_\mu(0) | v_e(t) \rangle = \sin\theta \cos\theta (e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t})$$

と計算できるから、これを自乗して (2.85b) を使えば、遷移確率の式 (2.87) が得られる。

式 (2.87) の位相を計算すると $\frac{\delta m^2 L}{2p} = \frac{2\pi L}{\lambda}$, $L = ct$ と置いて、振動波長 $\lambda = \frac{4\pi p}{\delta m^2}$ となる。プランクの定数や c を適当に入れて次元を回復すれば

$$\lambda(m) = (4\pi) \frac{MeV}{\hbar c} \left(\frac{\hbar c}{10^6 MeV} \right)^2 \frac{p(MeV/c)}{\delta m^2 (eV)^2} = 2.5 \times \frac{p(MeV/c)}{\delta m^2 (eV)^2}$$

が得られる。

3 ディラック方程式

3.1

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m, \quad [p_i, x_j] = -i\delta_{ij}$$

を代入せよ。

3.2

$$[p_j, L_k] = [p_j, x_i p_j - x_j p_i] = i p_k$$

を使えば、

$$[\alpha_j p_j + \beta m, L_1] = i(-\alpha_2 p_3 + \alpha_3 p_2) = -i\{\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}\}_1$$

また、

$$[\alpha_i, \Sigma_j] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} = 2i \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{bmatrix} = 2i\alpha_k$$

$$[\beta, \Sigma_j] = 0$$

を使えば、

$$[\alpha_j p_j + \beta m, \Sigma_1/2] = i(\alpha_2 p_3 - \alpha_3 p_2) = i\{\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}\}_1 \quad (1)$$

従って $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \boldsymbol{\Sigma}/2$ の各項は、ハミルトニアンと交換しないが、和は交換する。

3.4

式 (1) と \mathbf{p} との内積をとればゼロとなる。

3.5

ヘリシティは運動方向のスピンの向きを表す。質量がゼロでないときは、速度は光速を越えないから、それより早く動くローレンツ系は移ればヘリシティは逆転する。

3.6

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

を、 χ_+ , χ_- に演算して確かめよ。

3.7

ハミルトニアンの中の \mathbf{p} は、微分演算子である。

$$\psi(x) = u(p) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - iEt)$$

に演算すると微分演算子 \mathbf{p} が、c-数の \mathbf{p} になる。

$$\begin{aligned} H\psi(x) &= [\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m]\psi(x) && \mathbf{p} \text{ は演算子} \\ &= [\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m]u(p) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - iEt) && \mathbf{p} \text{ は c-数} \end{aligned}$$

$\exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - iEt)$ を省略して書くと

$$\begin{bmatrix} m & \sigma \cdot \mathbf{p} \\ \sigma \cdot \mathbf{p} & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_r \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{m + \frac{(\sigma \cdot \mathbf{p})^2}{|E+m|}\} \chi_r \\ (1 - \frac{m}{|E+m|}) \sigma \cdot \mathbf{p} \chi_r \end{bmatrix} = |E| \begin{bmatrix} \chi_r \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{|E+m|} \chi_r \end{bmatrix}$$

$$\therefore H\psi(x) = |E|\psi(x)$$

3.8

$$u_r^\dagger u_s = N^2 [\chi_r^\dagger, \chi_r^\dagger \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m}] \begin{bmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_s \end{bmatrix} = N^2 \chi_r^\dagger \left[1 + \frac{p^2}{(E+m)^2} \right] \chi_s = \chi_r^\dagger [E+m+E-m] \chi_s = 2E \delta_{rs}$$

(3.23b) を参照すれば、

$$\begin{aligned} v_r(p) &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_{r'} \\ \chi_{r'} \end{bmatrix} \quad r' = 3-r \text{ であるから} \\ v_r^\dagger v_s &= N^2 [\chi_{r'}^\dagger \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m}, \chi_{r'}^\dagger] \begin{bmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_{s'} \\ \chi_{s'} \end{bmatrix} = N^2 \chi_{r'}^\dagger \left[1 + \frac{p^2}{(E+m)^2} \right] \chi_{s'} = 2E \delta_{rs} \\ \bar{u}_r u_s &= N^2 [\chi_r^\dagger, \chi_r^\dagger \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m}] \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_s \end{bmatrix} = N^2 \chi_r^\dagger \left[1 - \frac{p^2}{(E+m)^2} \right] \chi_s \\ &= \chi_r^\dagger [E+m - (E-m)] \chi_s = 2m \delta_{rs} \\ \bar{v}_r v_s &= N^2 [\chi_{r'}^\dagger \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m}, \chi_{r'}^\dagger] \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_{s'} \\ \chi_{s'} \end{bmatrix} = N^2 \chi_{r'}^\dagger \left[-1 + \frac{p^2}{(E+m)^2} \right] \chi_{s'} = -2m \delta_{rs} \\ \bar{u}_r v_s &= N^2 [\chi_r^\dagger, \chi_r^\dagger \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m}] \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_{s'} \\ \chi_{s'} \end{bmatrix} = N^2 \chi_r^\dagger \left[\frac{p^2}{(E+m)^2} - \frac{p^2}{(E+m)^2} \right] \chi_{s'} = 0 \end{aligned}$$

3.9

$$(p_\mu \gamma^\mu - m)u(p) = \beta\{E - (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m)\}u(p)$$

と書き直し、 $u(p)$ が $\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ の固有関数であることを使う。 $v(p)$ に関しては $v(p)$ が、負エネルギー状態の $u(-\mathbf{p})$ に等しいことを使う。

3.11

$E > 0$ の解に対して (3.23a) より

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_1 + ip_2}{E+m} \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_1 - ip_2}{E+m} \\ \frac{-p_3}{E+m} \end{bmatrix}$$

これから $(\hat{p}_\pm, \hat{p}_3) = \left(\frac{p_1 \pm ip_2}{E+m}, \frac{p_3}{E+m} \right)$ として

$$[u_1 \bar{u}_1]_{ij} = N^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\hat{p}_3 & -\hat{p}_- \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{p}_3 & 0 & -(\hat{p}_3)^2 & -\hat{p}_3 \hat{p}_- \\ \hat{p}_+ & 0 & -\hat{p}_+ \hat{p}_3 & -(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) \end{bmatrix}_{ij}$$

$u_2 \bar{u}_2$ についても同じ計算をして、 $N^2 = E + m$ を入れると

$$\begin{aligned} \sum_{r=1,2} u_r \bar{u}_r &= \begin{bmatrix} m+E & 0 & -\hat{p}_3 & -\hat{p}_- \\ 0 & m+E & -\hat{p}_+ & \hat{p}_3 \\ \hat{p}_3 & \hat{p}_- & m-E & 0 \\ \hat{p}_+ & -\hat{p}_3 & 0 & m-E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+E & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & m-E \end{bmatrix} \\ &= m\mathbf{1} + E\beta - \beta\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} = m - p_\mu \gamma^\mu \end{aligned}$$

3.12

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} (i, j = 1 \sim 3) &= \frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{2} [\beta\alpha_i\beta\alpha_j - \{i \leftrightarrow j\}] = \frac{i}{2} [-2i\Sigma_k] = \Sigma_k \\ \sigma^{0i} &= \frac{i}{2} [\gamma^0, \gamma^k] = \frac{i}{2} [\beta\beta\alpha_k - \beta\alpha_k\beta] = i\alpha_k \\ L_k \equiv \sigma_{ij} &= g_{i\rho}g_{j\sigma}\sigma^{\rho\sigma} = \sigma^{ij} = \Sigma_k \\ N_k \equiv \sigma_{0k} &= g_{0\rho}g_{k\sigma}\sigma^{\rho\sigma} = -\sigma^{0k} = -i\alpha_k \end{aligned}$$

は、(2.63) の関係式を充たす。

3.13

$$\gamma^\mu + \varepsilon^\mu{}_\sigma \gamma^\sigma = \left(1 + \frac{i}{4} \sigma^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma}\right) \gamma^\mu \left(1 - \frac{i}{4} \sigma^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma}\right)$$

$\varepsilon^\mu{}_\rho = g^{\mu\rho} \varepsilon_{\rho\sigma}$ を入れて整理すると

$$g^{\mu\rho} \varepsilon_{\rho\sigma} \gamma^\rho = -\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \sigma^{\rho\sigma}] \varepsilon_{\rho\sigma}$$

ρ と σ を入れ替えたものを加え、 $\varepsilon_{\rho\sigma}$ の係数を比較すると

$$g^{\mu\rho} \gamma^\sigma - g^{\mu\sigma} \gamma^\rho = \frac{1}{2i} [\gamma^\mu, \sigma^{\rho\sigma}]$$

任意の A, B, C について成立する恒等式

$$[A, [B, C]] = \{C, \{A, B\}\} - \{B, \{A, C\}\}$$

を使うと

$$\frac{1}{2i} [\gamma^\mu, \frac{i}{2} [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]] = \frac{1}{4} [\{\gamma^\sigma, \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\}\} - \{\gamma^\rho, \{\gamma^\mu, \gamma^\sigma\}\}] = \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} \gamma^\sigma - g^{\mu\sigma} \gamma^\rho)$$

3.14

$\sigma^{\mu\nu\dagger} = \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0$ を使え。

3.15

級数展開して $\alpha_1^{2n} = 1$, $\alpha_1^{2n+1} = \alpha_1$ を使うと

$$\exp(-iN_1\eta) = \left[1 + \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + \cdots\right] - \left[\frac{\eta}{2} + \left(\frac{\eta}{2}\right)^3 + \cdots\right] \alpha_1 = \cosh \frac{\eta}{2} - \sinh \frac{\eta}{2} \alpha_1$$

3.16

$$w_{1,2} = \begin{bmatrix} \chi_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_{3,4} = \begin{bmatrix} 0 \\ \chi_{1,2} \end{bmatrix}$$

と書けるから、

$$\exp\left(\frac{\eta}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}\right) w_1 = \begin{bmatrix} \cosh \frac{\eta}{2} & \sinh \frac{\eta}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \\ \sinh \frac{\eta}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & \cosh \frac{\eta}{2} \end{bmatrix} w_1 = \begin{bmatrix} \cosh \frac{\eta}{2} \chi_1 \\ \sinh \frac{\eta}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \chi_1 \end{bmatrix}$$

$\cosh \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}$, $\sinh \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}}$ を入れると

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \chi_1 \\ \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \chi_1 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_1 \end{bmatrix}$$

3.17

$$\partial_\mu j^\mu = -i\partial_\mu \bar{\psi} i \gamma^\mu \psi = -i\{(\partial \bar{\psi} i \gamma^\mu + m)\psi + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi\} = 0$$

3.18

まず、空間反転に対してローレンツ演算子は、 $S = \gamma^0$ となる。座標変換の部分 $(x^0; \mathbf{x}) \rightarrow (x^0; -\mathbf{x})$ を省略すると $\psi \rightarrow \gamma^0 \psi$, $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \gamma^0$ であるから

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \psi &\rightarrow \bar{\psi}' \psi' = \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \psi \\ \bar{\psi} \gamma^5 \psi &\rightarrow \bar{\psi}' \gamma^5 \psi' = \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi = -\bar{\psi} \gamma^5 \psi \\ \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &\rightarrow \bar{\psi}' \gamma^\mu \psi' = \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \\ &\dots \end{aligned}$$

ここで、 $\gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 = \gamma_0$, $\gamma^0 \gamma^k \gamma^0 = -\gamma^k = \gamma_k$ を使った。

次に、微少固有ローレンツ変換に関しては、ベクトルについて適用すると

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &\rightarrow \left(1 + \frac{i}{4} \sigma^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma}\right) \gamma^\mu \left(1 - \frac{i}{4} \sigma^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma}\right) = \gamma^\mu + \frac{i}{4} [\sigma^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] \varepsilon_{\rho\sigma} \\ &= \gamma^\mu + \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} \gamma^\sigma - g^{\mu\sigma} \gamma^\rho) \varepsilon_{\rho\sigma} = (\delta_\rho^\mu + \varepsilon_\rho^\mu) \gamma^\rho \end{aligned}$$

これは式 (3.53a) に一致するから、 $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ はベクトルとして変換する。

3.19

γ について、また $E > 0$ の解について計算法を記す。(3.23a) を使うと

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(p') \gamma^k u_s(p) &= NN' \left[\chi_r^\dagger, -\chi_r^\dagger \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}'}{E+m} \right] \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_s \end{bmatrix} \\ &= NN' \chi_r^\dagger \left[\frac{\sigma \cdot \mathbf{p}'}{E+m} \sigma_k + \sigma_k \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \right] \chi_s \\ &\simeq \chi_r^\dagger [(\mathbf{p} + \mathbf{p}') + i\boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{p}' - \mathbf{p})] \chi_s \end{aligned}$$

最後の式は、低エネルギー極限で $E' \rightarrow E$ を使った。

3.20

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^T &= \gamma^0 u_1^* = N \begin{bmatrix} \chi_1^* \\ -\frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_1^* \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\hat{p}_3 \\ -\hat{p}_-^* \end{bmatrix} \\ C\bar{u}_1^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\hat{p}_3 \\ -\hat{p}_-^* \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \hat{p}_+ \\ -\hat{p}_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = u_4(-\mathbf{p}) = v_1(p) \end{aligned}$$

ただし、 \hat{p}_\pm , \hat{p}_3 は演習 (3.11) の解答で定義した。

3.21

式 (3.102b) の複素共役をとり、 $\sigma_2 \sigma \sigma_2 = -\sigma^*$ を使うと

$$(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \eta^* + m \sigma_2^* \eta = \sigma_2 \{ (\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \sigma_2 \eta^* - m \sigma_2 \eta \} = 0$$

{...} の部分に左から $-i$ を掛けると

$$(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) (-i \sigma_2 \eta^*) - m \sigma_2 (-i \sigma_2 \eta^*) = 0$$

4 場の量子化

4.1

複素スカラー場について

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu \phi^\dagger} &= \partial^\mu \phi, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -m^2 \phi \\ \therefore \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} &= (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \end{aligned}$$

電磁場について

$$\begin{aligned} \frac{\partial (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= 4F^{\mu\nu}, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= -qj^\nu \\ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} &= -\partial_\mu F^{\mu\nu} + qj^\nu = 0 \\ \therefore \partial_\mu F^{\mu\nu} &= qj^\nu \end{aligned}$$

4.3

H の積分の中を時間で微分すると

$$\frac{\partial^2 \phi^\dagger}{\partial t^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + m^2 \phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial t} + \{\phi \leftrightarrow \phi^\dagger\}$$

第一項を、運動方程式を使い変形した後、部分積分すると

$$(\nabla^2 - m^2) \phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[\nabla \phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] - \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - m^2 \phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

第一項は表面積分であるから無限遠方でゼロとなる。第2,3項は式4の第2,3項と相殺する。すなわち積分の中がゼロになるから $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ となる。

P については、微分すると積分の中は

$$\frac{\partial^2 \phi^\dagger}{\partial t^2} \nabla \phi + \nabla \phi^\dagger \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} = (\nabla^2 - m^2) \phi^\dagger \nabla \phi + \nabla \phi^\dagger (\nabla^2 - m^2) \phi + \nabla \left(\frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

ここで ∇^2 の項を x_i で部分積分して

$$= \left[\partial_i \phi^\dagger \nabla \phi + \{\phi^\dagger \rightarrow \phi\} \right]_{x_i=-\infty}^{x_i=\infty} - \nabla (\nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi - m^2 \phi^\dagger \phi) + \nabla \left(\frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

第一項は表面積分であり、第2項以下も表面積分であるからゼロとなる。 $\frac{\partial Q}{\partial t}$ も同様にしてゼロとなる。

4.4

数学的帰納法を使う。 $a_k a_p^\dagger = \delta_{pk} + a_p^\dagger a_k$, $a_k^\dagger a_p^\dagger = a_p^\dagger a_k^\dagger$, $a_k |0\rangle = 0$ を使うと1粒子状態について

$$H|p\rangle = \sum \omega_k a_k^\dagger a_k a_p^\dagger |0\rangle = \sum \omega_k a_k^\dagger (\delta_{pk} + a_p^\dagger a_k) |0\rangle = \omega_p |p\rangle$$

次に、 $|n\rangle \equiv |p_1, p_2, \dots\rangle = a_{p_1}^\dagger |p_2, \dots\rangle = a_{p_1}^\dagger |n-1\rangle$ にハミルトニアンを作用させ、 $H|n-1\rangle = (\omega_2 + \dots + \omega_n) |n-1\rangle$ を仮定すると

$$\begin{aligned} H|n\rangle &= \sum \omega_k a_k^\dagger a_k a_{p_1}^\dagger |n-1\rangle = \sum \omega_k a_k^\dagger (\delta_{p_1 k} + a_{p_1}^\dagger a_k) |n-1\rangle \\ &= \omega_1 a_{p_1}^\dagger |n-1\rangle + a_{p_1}^\dagger H|n-1\rangle = \omega_1 |n\rangle + (\omega_2 + \dots) a_{p_1}^\dagger |n-1\rangle \\ &= (\omega_1 + \omega_2 + \dots) |n\rangle \end{aligned}$$

4.5

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[c_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t_x} + d_k^\dagger e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\omega t_x} \right] \\ \pi(y) &= \partial_t \phi^\dagger(y) = \int \frac{id^3 k}{2(2\pi)^3} \left[c_k^\dagger e^{-i\mathbf{k}\mathbf{y} + i\omega t_y} - d_k e^{+i\mathbf{k}\mathbf{y} - i\omega t_y} \right] \end{aligned}$$

を入れると

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = \iint \frac{id^3k d^3p}{(2\pi)^6 4\omega} \{ [c_k, c_p^\dagger] e^{i\mathbf{kx} - \mathbf{py} - i(\omega_k - \omega_p)t} - [d_k^\dagger, d_p] e^{-i\mathbf{kx} - \mathbf{py} + i(\omega_k - \omega_p)t} \\ - [c_k, d_p] e^{i\mathbf{kx} - \mathbf{py} - i(\omega_k - \omega_p)t} + [d_k^\dagger, d_p^\dagger] e^{-i\mathbf{kx} - \mathbf{py} + i(\omega_k - \omega_p)t} \}$$

式(4.51)を使えば、 $\{\dots\}$ 内第3,4項はゼロとなり、第1,2項の $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{p})$ は、 $\omega_k = \omega_p$ 並びに $\int d^3p$ 積分で1を与えるので

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = \int \frac{id^3k}{2(2\pi)^3} \{ e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} + e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

他の式も同様に証明できる。

4.6

Hについて証明する。(4.79)を(4.78a)式に代入すると

$$H = \int d^3x \psi^\dagger i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \iint \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{2E_k 2(2\pi)^3} [a_k^\dagger a_p u_r^*(k) u_s(p) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} + i(E_k - E_p)t} \\ - b_k b_p^\dagger v_r^*(k) v_s(p) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} - i(E_k - E_p)t} - a_k^\dagger b_p^\dagger u_r^*(k) v_s(p) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} + i(E_k + E_p)t} \\ + b_k b_p v_r^*(k) u_s(p) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} - i(E_k + E_p)t}]$$

$u_r^*(k) u_s(p) = E_k \delta_{rs} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \dots$ ((3.29)参照)を使えば、第3,4項はゼロで、第1,2項については $E_k = E_p, \int d^3p = 1$ を与えるから

$$H = \int \frac{E_k d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} [a_k^\dagger a_k - b_k b_k^\dagger] = \sum E_k [a_k^\dagger a_k + b_k^\dagger b_p]$$

4.7

積分路を複素上半平面で閉じることができるので、コーシーの積分定理を使う。

5 QED

5.1

$$\langle f | H_I^\varepsilon(t_1) H_I^\varepsilon(t_2) | i \rangle = \sum \langle f | H_{IS} | n \rangle e^{-i(E_n - E_f)t_1 - \varepsilon|t_1|} \langle n | H_{IS} | i \rangle e^{-i(E_i - E_n)t_2 - \varepsilon|t_2|}$$

を使えばS行列第2次の項の期待値は

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \langle f | H_{IS}^\varepsilon(t_1) H_{IS}^\varepsilon(t_2) | i \rangle \\ &= - \sum \langle f | H_{IS} | n \rangle \langle n | H_{IS} | i \rangle \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{-i(E_n - E_f)t_1 - \varepsilon|t_1| - i(E_i - E_n)t_2 - \varepsilon|t_2|} \\ &= - \sum \langle f | H_{IS} | n \rangle \langle n | H_{IS} | i \rangle \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 e^{i(E_f - E_i)t_1 - \varepsilon|t_1|} \int_0^{\infty} d\tau e^{i(E_i - E_n)\tau - \varepsilon\tau} \\ &= 2\pi i \delta(E_f - E_i) \sum \frac{\langle f | H_{IS} | n \rangle \langle n | H_{IS} | i \rangle}{E_i - E_n + i\varepsilon} \end{aligned}$$

5.2

(5.31)第一式より $dE_{lab} = \beta \gamma d \cos \theta^*$ で、また、 $d\Omega = d \cos \theta d\phi$ 従って

$$\frac{dN}{d\Omega} \propto \frac{dN}{d \cos \theta} \propto \frac{dN}{dE_{lab}}$$

5.3

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1 \cdot p_2)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2(p_1 \cdot p_3)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = p_1^2 + p_4^2 - 2(p_1 \cdot p_4)$$

$p_i^2 = m_i^2$, $p_2 - p_3 - p_4 = -p_1$ を使えば、

$$s + t + u = \sum m_i^2$$

5.6

(5.56a) の証明; $\gamma^5 \gamma^5 = 1$, $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$ を使うと

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] &= \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] = \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma^5] \\ &= -\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^5 \gamma^{\mu_{2n+1}}] = (-1)^{2n+1} \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] \\ &= -\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] \\ \therefore \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] &= 0 \end{aligned}$$

(5.56b) (3.39) 式の両辺のトレースをとり、 $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu]$ を使う。

(5.56c) $\gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu$ と (5.56b) を使えば

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 8g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 8g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - \text{Tr}[\gamma^\nu \{2g^{\mu\rho} - \gamma^\rho \gamma^\mu\} \gamma^\sigma] \\ &= 8g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma] = 8g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho \{2g^{\mu\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\mu\}] \\ &= 8g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 8g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] \end{aligned}$$

ここで最後の項を導くときに、循環置換でトレースの値は変わらないことを使った

$$\therefore \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}$$

5.7

(3.23a) と $E_i = E_f$, $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$ を使えば、散乱振幅は

$$\sum_{E>0} \bar{u}(p_f) \gamma^0 u(p_i) = u^\dagger_r(p_f) u_r(p_i) = N^2 \chi^\dagger \left[\mathbf{1} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{p}_i}{(E+M)^2} \right\} + i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_f \times \mathbf{p}_i}{(E+m)^2} \right] \chi$$

に比例する。第一項がスピン反転なしの振幅、第2項がスピン反転振幅である。

5.8

中間状態として真空状態のみ考慮すれば

$$\begin{aligned} \langle f | i e^{i\phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x)} - \partial^\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) | i \rangle &= i e \{ \langle f | (\phi^\dagger(x) | 0 \rangle \langle 0 | \partial^\mu \phi(x) | i \rangle - \langle f | \partial^\mu \phi^\dagger(x) | 0 \rangle \langle 0 | \phi(x) | i \rangle) \} \\ &= e \{ p^\mu_i e^{i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \cdot \mathbf{x} - i(E_i - E_f)t} + p^\mu_f e^{-i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \cdot \mathbf{x} + i(E_i - E_f)t} \} \\ &= e \{ p_i^\mu e^{i(p_i - p_f)_\mu x^\mu} + p_f^\mu e^{-i(p_i - p_f)_\mu x^\mu} \} \end{aligned}$$

後で x で積分するから、第1項と第2項は同じ寄与を与える。(5.49)と比較すると $\bar{u}_s \gamma^\mu u_s$ が $2p^\mu$ に置き換わっているだけであることが判る。すなわち $(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})$ が 1 となる。

5.9

$q = p_3 - p_1$, $q^2 = p_3^2 + p_1^2 - 2(p_1 \cdot p_3) = 2(m^2 - (p_1 \cdot p_3))$ に留意して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} q_\mu L^{\mu\nu} &= (p_{3\mu} - p_{1\mu}) \left[p_3^\mu p_1^\nu + p_1^\mu p_3^\nu + \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu} \right] = \left[\{p_3^2 - (p_1 \cdot p_3)\} p_1^\nu + \{(p_1 \cdot p_3) - p_1^2\} p_3^\nu + \frac{q^2}{2} q^\nu \right] \\ &= \frac{q^2}{2} p_1^\nu - \frac{q^2}{2} p_3^\nu + \frac{q^2}{2} q^\nu = 0 \end{aligned}$$

5.10

$$k_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu} = e^2 \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \frac{(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} \not{k} + \not{k} \frac{(\not{p}' - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2} \gamma^\mu \right] u(p)$$

$p^2 = m^2$, $\not{k} \not{k} = k^2 = 0$, $\not{p} u(p) = m u(p)$, $\bar{u}(p') \not{p}' = m \bar{u}(p')$, $p - k' = p' - k$ を使うと括弧 $[\dots]$ の中の各項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2} \not{k} u(p) &= \gamma^\mu \frac{2(p \cdot k) - \not{k} \not{p} + m \not{k}}{2(p \cdot k)} u(p) = \gamma^\mu u(p) \\ \bar{u}(p') \not{k} \frac{\not{p}' - \not{k}' + m}{(p-k')^2 - m^2} \gamma^\mu &= \bar{u}(p') \not{k} \frac{\not{p}' - \not{k}' + m}{(p'-k)^2 - m^2} \gamma^\mu = \bar{u}(p') \frac{2(p' \cdot k) - \not{p}' \not{k} + m \not{k}}{-2(p' \cdot k)} = -\bar{u}(p') \gamma^\mu \end{aligned}$$

となって、第1項と第2項が相殺してゼロとなる。

5.11

(5.10) を参照せよ。

5.12

$k^2 = k'^2 = p^2 = p'^2 = 0 \rightarrow (p+k)^2 - m^2 = s$, $\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu = -g_{\mu\nu}$ と付録 (A.9) を使えば
 $\not{\varepsilon} \not{p} \not{\varepsilon}^* = -\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = 2 \not{p}$, $\not{\varepsilon}' \not{p}' \not{\varepsilon}'^* = 2 \not{p}'$ と言えるから

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}_1|^2 &= \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr}[\not{p}' \not{\varepsilon}'^* (\not{p} + \not{k}) \not{\varepsilon} \not{p} \not{\varepsilon}^* (\not{p} + \not{k}) \not{\varepsilon}'] = \frac{e^4}{s^2} \text{Tr}[\not{p}' \not{k} \not{p} \not{k}] \\ &= \frac{4e^4}{s^2} \{2(p' \cdot k)(p \cdot k) - (p' \cdot p)(k^2)\} \end{aligned}$$

$k^2 = -Q^2$, $k'^2 = 0$, $s = 2(p \cdot k) - Q^2 = 2(p' \cdot k')$, $u = -2(p' \cdot k) + Q^2$, $t = -2(p \cdot p')$ を入れると

$$|\overline{\mathcal{M}}_1|^2 = \frac{4e^4}{s^2} \left[-(u + Q^2) \frac{s + Q^2}{2} - \frac{Q^2}{t} \right] = -2e^4 \left[\frac{u}{s} + \frac{Q^2(s + t + u + Q^2)}{s^2} \right]$$

$s + t + u = -Q^2$ であるから

$$|\overline{\mathcal{M}}_1|^2 = 2e^4 \left(-\frac{u}{s} \right)$$

$|\overline{\mathcal{M}}_2|^2$ は、 $|\overline{\mathcal{M}}_1|^2$ から、 $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$, $k \rightarrow -k'$ の置き換えで得られるから

$$|\overline{\mathcal{M}}_2|^2 = \frac{e^4}{4u^2} \text{Tr}[\not{p}' \not{\varepsilon}'^* (\not{p} + \not{k}) \not{\varepsilon} \not{p} \not{\varepsilon}^* (\not{p} + \not{k}) \not{\varepsilon}'] = \frac{4e^4}{u^2} \{2(p' \cdot k')(p \cdot k') - (p' \cdot p)(k'^2)\} = 2e^4 \left(-\frac{s}{u} \right)$$

干渉項は

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}_1 \mathcal{M}_2^*| &= \frac{e^4}{4su} \sum_{r,s} [\overline{u}_r(p') \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu u_s(p)] [\overline{u}_s(p) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma_\mu u_r(p')] \\ &= \frac{e^4}{4su} \text{Tr}[\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu \not{p} \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma_\mu] \end{aligned}$$

付録の式 (A.9) ($\gamma_\mu A B C \gamma^\mu = -2 C B A$, $\gamma_\mu A B \gamma^\mu = 4(A \cdot B)$, ... 等) を使えば

$$|\overline{\mathcal{M}}_1 \mathcal{M}_2^*| = -\frac{2e^4}{su} (p+k) \cdot (p-k') \text{Tr}[\not{p}' \not{p}]$$

最後に $(p \cdot p') = -t/2$, $(k \cdot k') = -(t + Q^2)/2$ 等を入れれば

$$|\overline{\mathcal{M}}_1 \mathcal{M}_2^*| = \frac{2e^4}{su} t \{s + t + u + 2Q^2\} = \frac{2e^4}{su} = \frac{2e^4}{su} t Q^2$$

次に $|\overline{\mathcal{M}}_2 \mathcal{M}_1^*| = |\overline{\mathcal{M}}_1 \mathcal{M}_2^*|$ を証明する。

$$|\overline{\mathcal{M}}_2 \mathcal{M}_1^*| = \frac{4e^4}{su} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma_\nu \not{p} \gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\nu \not{p}']$$

であるから、

$$\text{Tr}[\gamma^1 \gamma^2 \cdots \gamma^n] = \text{Tr}[\gamma^n \cdots \gamma^2 \gamma^1]$$

を言えばよい。 $\text{Tr}[A] = \text{Tr}[A^T]$, $C \gamma^{\mu T} C^{-1} = -\gamma^\mu$ であるから、 $CC^{-1} = 1$ を各 γ の間に入れれば

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^1 \gamma^2 \cdots \gamma^n] &= \text{Tr}[\gamma^{nT} \cdots \gamma^{2T} \gamma^{1T}] = \text{Tr}[C \gamma^{nT} C^{-1} \cdots C \gamma^{1T} C^{-1}] \\ &= (-1)^n \text{Tr}[\gamma^n \cdots \gamma^2 \gamma^1] \end{aligned}$$

奇数個の γ の積のトレースはゼロになるので、結局あらゆる n で等式が成り立つ。
 全部の項を足し合わせて

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left[-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} + \frac{2tQ^2}{su} \right]$$

5.13
条件から

$$\begin{aligned}(\not{p} + m) \not{\epsilon} u(p) &= -\not{\epsilon}(-\not{p} + m)u(p) = 0, & (\not{p} + m) \not{\epsilon}' u(p) &= 0 \\ k \not{\epsilon} &= -\not{\epsilon} k, & k' \not{\epsilon}' &= -\not{\epsilon}' k'\end{aligned}$$

が成立する。フォトンについては偏極の平均をとらないから

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{e^4}{2} \text{Tr} \left[(\not{p}' + m) \left(\frac{\not{\epsilon}' \not{\epsilon} k}{2(k \cdot p)} + \frac{\not{\epsilon} \not{\epsilon}' k'}{2(k' \cdot p)} \right) (\not{p} + m) \left(\frac{k \not{\epsilon} \not{\epsilon}'}{2(k \cdot p)} + \frac{k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}}{2(k' \cdot p)} \right) \right]$$

これは最高 8 個のガンマ行列を含むトレース計算である。演習問題 (5.12) と同じく、第一項、第一項の $\epsilon \rightarrow \epsilon'$, $k \rightarrow -k'$ 置換で与えられる第 4 項、干渉項である第 2, 第 3 項に分けられ、第 2、第 3 項は演習問題 (5.12) で証明したように同じ寄与を与える。まず第一項 T_1 は

$$\frac{8(k \cdot p)^2}{e^4} T_1 = \text{Tr}[(\not{p}' + m) \not{\epsilon}' \not{\epsilon} k (\not{p} + m) k \not{\epsilon} \not{\epsilon}'] = \text{Tr}[\not{p}' \not{\epsilon}' \not{\epsilon} k \not{p} k \not{\epsilon} \not{\epsilon}']$$

m^2 に比例する項は $k k = k^2 = 0$ によってゼロとなる。

$$\begin{aligned}&= 2(k \cdot p) \text{Tr}[\not{p}' \not{\epsilon}' \not{\epsilon} k \not{\epsilon} \not{\epsilon}'] && : k \not{p} = 2(k \cdot p) - \not{p} k, k k = 0 \text{ を使った。} \\ &= 2(k \cdot p) \text{Tr}[\not{p}' \not{\epsilon}' k \not{\epsilon} \not{\epsilon}'] && : \not{\epsilon} k = -k \not{\epsilon}, \not{\epsilon} \not{\epsilon} = -1 \text{ を使った。} \\ &= 8(k \cdot p) \{(k \cdot p') + 2(k \cdot \epsilon')(p' \cdot \epsilon')\} && : (5.56c) \\ &= 8(k \cdot p) \{(k' \cdot p) + 2(k \cdot \epsilon')^2\}\end{aligned}$$

最後の式を導くとき、 $k + p = k' + p'$ より $k' \cdot p = k \cdot p'$, $\epsilon' \cdot p' = -\epsilon' \cdot k$ を使った。次に第 4 項は $\epsilon \rightarrow \epsilon'$, $k \rightarrow -k'$ として

$$\frac{8(k' \cdot p)^2}{e^4} T_4 = 8(k' \cdot p) \{(k \cdot p) - 2(k' \cdot \epsilon)^2\}$$

干渉項は

$$\begin{aligned}\frac{8(k \cdot p)(k' \cdot p)}{e^4} T_2 &= \text{Tr}[(\not{p}' + m) \not{\epsilon}' \not{\epsilon} k (\not{p} + m) k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}] \\ &= \text{Tr}[(\not{p} + m) \not{\epsilon}' \not{\epsilon} k (\not{p} + m) k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}] + \text{Tr}[(k - k') \not{\epsilon}' \not{\epsilon} k (\not{p} + m) k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}] \\ &\equiv S_1 + (S_2 + S_3)\end{aligned}$$

m に比例する項は消える。

$$\begin{aligned}S_1 &= \text{Tr}[\not{p} \not{\epsilon}' \not{\epsilon} k \not{p} k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}] + m^2 \text{Tr}[\not{\epsilon}' \not{\epsilon} k k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}] \\ &= \text{Tr}[\not{p} \not{\epsilon}' \not{\epsilon} \{2(k \cdot p) - \not{p} k\} k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}] + m^2 \text{Tr}[\not{\epsilon}' \not{\epsilon} k k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}] \\ &= 2(k \cdot p) \text{Tr}[\not{p} \not{\epsilon}' \not{\epsilon} k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}] - \text{Tr}[\not{p} \not{\epsilon}' \not{\epsilon} \not{p} k k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}] + m^2 \text{Tr}[\not{\epsilon}' \not{\epsilon} k k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}]\end{aligned}$$

$\not{\epsilon} \not{p} = -\not{p} \not{\epsilon}$, $\not{\epsilon}' \not{p}' = -\not{p}' \not{\epsilon}'$, $\not{p} \not{p} = m^2$ を使えば、第 2、第 3 項は相殺する。従って

$$S_1 = 4(k \cdot p)(k' \cdot \epsilon) \text{Tr}[\not{p} \not{\epsilon}' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}] - 2(k \cdot p) \text{Tr}[\not{p} \not{\epsilon}' k' \not{\epsilon} \not{\epsilon}' \not{\epsilon}]$$

第一項はゼロ $\because \not{\epsilon}' \not{\epsilon}' = -1$, $(p \cdot \epsilon) = 0$

$$\begin{aligned}\therefore S_1 &= +2(k \cdot p) \text{Tr}[\not{p} k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon} \not{\epsilon}' \not{\epsilon}] = 2(k \cdot p) \text{Tr}[\not{p} k' \not{\epsilon}' \{2(\epsilon \cdot \epsilon') - \not{\epsilon}' \not{\epsilon}\} \not{\epsilon}] \\ &= 4(k \cdot p)(\epsilon \cdot \epsilon') \text{Tr}[\not{p} k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}] - 2(k \cdot p) \text{Tr}[\not{p} k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}' \not{\epsilon} \not{\epsilon}] \\ &= 16(k \cdot p)(\epsilon \cdot \epsilon') \{(p \cdot k')(\epsilon' \cdot \epsilon) + (p \cdot \epsilon)(k' \cdot \epsilon') - (p \cdot \epsilon')(k' \cdot \epsilon)\} - 8(k \cdot p)(p \cdot k') \\ &= 8(k \cdot p)(p \cdot k') \{2(\epsilon \cdot \epsilon')^2 - 1\}\end{aligned}$$

最後の式では $(k' \cdot \epsilon') = (p \cdot \epsilon') = 0$ を使った。

$$\begin{aligned}S_2 &= \text{Tr}[k \not{\epsilon}' \not{\epsilon} k \not{p} k' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}] = -\text{Tr}[k \not{\epsilon} \not{\epsilon}' \not{\epsilon} k \not{p} k' \not{\epsilon}'] \\ &= -2(\epsilon \cdot \epsilon') \text{Tr}[k \not{\epsilon} k \not{p} k' \not{\epsilon}'] + \text{Tr}[k \not{\epsilon}' \not{\epsilon} \not{\epsilon} k \not{p} k' \not{\epsilon}']\end{aligned}$$

第一項は $k \not\epsilon = - \not\epsilon k$, $k k = 0$ よりゼロ。第2項は $\not\epsilon \not\epsilon = \epsilon^2 = -1$ を入れると

$$= -Tr[\not\epsilon' k \not{p} k' \not\epsilon' k] = -2(k \cdot \epsilon')Tr[\not{p} k' \not\epsilon' k] + Tr[k \not\epsilon' \not{p} k' \not\epsilon' k]$$

第2項は $k k = 0$ よりゼロとなるから

$$= -8(k \cdot \epsilon')\{(p \cdot k')(k \cdot \epsilon') + (p \cdot k)(k' \cdot \epsilon') - (p \cdot \epsilon')(k \cdot k')\}$$

第2、3項はゼロであるから、結局

$$S_2 = -8(k \cdot \epsilon')^2(p \cdot k')$$

$$\text{次に、 } S_3 = -Tr[k' \not\epsilon' \not\epsilon k \not{p} k' \not\epsilon' \not\epsilon] = -2(k' \cdot \epsilon)Tr[\not\epsilon' \not\epsilon k \not{p} k' \not\epsilon'] + Tr[\not\epsilon' \not\epsilon k \not{p} k' \not\epsilon' k' \not\epsilon']$$

第2項は $\not\epsilon' k' = -k' \not\epsilon'$, $k' k' = 0$ によりゼロとなり、第一項で $\not\epsilon' \not\epsilon' = -1$ を使うと

$$\begin{aligned} &= 2(k' \cdot \epsilon)Tr[\not\epsilon k \not{p} k'] = 8(k' \cdot \epsilon)\{(\epsilon \cdot k)(p \cdot k') + (\epsilon \cdot k')(p \cdot k) - (p \cdot \epsilon)(k \cdot k')\} \\ &= 8(k' \cdot \epsilon)^2(p \cdot k) \end{aligned}$$

$$\therefore T_2 = S_1 + S_2 + S_3 = 8[(k \cdot p)(p \cdot k')\{2(\epsilon \cdot \epsilon')^2 - 1\} - (k \cdot \epsilon')^2(p \cdot k') + (k' \cdot \epsilon)^2(p \cdot k)]$$

$T_3 = T_2$ であるから

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \\ &= \frac{e^4}{(k \cdot p)^2}(k \cdot p)\{(k' \cdot p) + 2(k \cdot \epsilon')^2\} + \frac{e^4}{(k' \cdot p)^2}(k' \cdot p)\{(k \cdot p) - 2(k' \cdot \epsilon)^2\} \\ &\quad + 2\frac{e^4}{(k \cdot p)(k' \cdot p)}[(k \cdot p)(p \cdot k')\{2(\epsilon \cdot \epsilon')^2 - 1\} - (k \cdot \epsilon')^2(p \cdot k') + (k' \cdot \epsilon)^2(p \cdot k)] \end{aligned}$$

$(k \cdot p) = m\omega$, $(k' \cdot p) = m\omega'$ を使えば

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = e^4 \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4(\epsilon \cdot \epsilon')^2 \right]$$

実験室断面積は (5.46b) および $k = \omega$, $k' = \omega'$ を使えば

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{k'}{k}\right)^2 \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2 m^2} = \frac{\alpha^2}{4m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4(\epsilon \cdot \epsilon')^2 \right]$$

6 対称性と保存則

6.1 ラグランジアンを $\bar{\psi}$ と ψ に関して対称化すれば

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \gamma^\mu (\partial_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu) - m \right] \psi$$

矢印は演算方向を示す。

$$\begin{aligned} \delta\psi &= -i\delta\alpha\psi, \quad \delta\bar{\psi} = i\delta\alpha\bar{\psi}, \\ \sum \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} (-i\delta\alpha\psi) + (i\delta\alpha\bar{\psi}) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \\ &= \frac{1}{2} [\bar{\psi} i\gamma^\mu (-i\delta\alpha\psi) - (i\delta\alpha\bar{\psi}) i\gamma^\mu \psi] = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \delta\alpha \end{aligned}$$

$\delta\alpha$ は任意の定数であるから規格化で落とせる。

6.2

$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$ から、ネーターカレントを計算すると

$$\begin{aligned} T^{00} &\stackrel{(6.23)}{=} \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial^0 \phi + \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\dagger)} \partial^0 \phi^\dagger - \mathcal{L} \\ &= \partial^0 \phi^\dagger \partial^0 \phi + \partial^0 \phi^\dagger \partial^0 \phi - [\partial^0 \phi^\dagger \partial^0 \phi - \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi - m^2 \phi^\dagger \phi] \\ &= \partial^0 \phi^\dagger \partial^0 \phi + \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^\dagger \phi \\ T^{0k} &= \partial^0 \phi^\dagger \partial^k \phi + \partial^k \phi^\dagger \partial^0 \phi = - \left[\frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \nabla_k \phi + \nabla_k \phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

電荷 Q は、 $\delta \phi = -i \delta \alpha \phi$, $\delta \phi^\dagger = i \delta \alpha \phi^\dagger$ の位相変換でラグランジアンが不変という要請から

$$j^0 \stackrel{(6.12)}{=} \partial^0 \phi^\dagger (-i \delta \alpha \phi) + (i \delta \alpha \phi^\dagger) \partial^0 \phi = -i \left(\frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \phi - \phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \delta \alpha$$

これらの式を

$$H = \int d^3 x T^{00}, \quad \mathbf{P}^k = \int d^3 x T^{0k}, \quad Q = \int d^3 x j^0$$

に入れれば (4.44) を得る。

6.3

ラグランジアン $\mathcal{L} = \bar{\psi} \{ \frac{i}{2} \gamma^\mu (\overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu) - m \} \psi$ から

$$\begin{aligned} T^{00} &= \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \partial^0 \phi_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\bar{\psi} i \gamma^0) \partial^0 \psi - \partial^0 \bar{\psi} (i \gamma^0 \psi) - \mathcal{L}] \\ &= \bar{\psi} \left[-\frac{i}{2} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \overrightarrow{\nabla} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \overleftarrow{\nabla}) + m \right] \psi = \psi^\dagger \left[\frac{1}{2i} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \overrightarrow{\nabla} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \overleftarrow{\nabla}) + \beta m \right] \psi \end{aligned}$$

部分積分して $= \psi^\dagger (-\boldsymbol{\alpha} \cdot i \nabla + \beta m) \psi$

同様に $T^{0k} = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \partial^k \phi_i = \frac{1}{2} (\bar{\psi} i \gamma^0 \partial^k \psi - \partial^k \bar{\psi} \gamma^0 \psi) = \frac{1}{2i} \psi^\dagger (\overrightarrow{\nabla}_k - \overleftarrow{\nabla}_k) \psi = \psi^\dagger (-i \nabla_k) \psi$

J^0 については、演習 (6.1) 参照

6.4

$T_\lambda^J = \langle \lambda_3 \lambda_4 | T^J(E) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$ として

$$\begin{aligned} \sigma_{TOT} &= \int d\Omega \sum_{\lambda_3, \lambda_4} |f_{\lambda_3 \lambda_4, \lambda_1 \lambda_2}|^2 \stackrel{(6.52)}{=} \int d\Omega \sum_{\lambda_3, \lambda_4} \left[\frac{1}{4p^2} \sum_{JJ'} (2J+1)(2J'+1) T_\lambda^J T_\lambda^{J'}{}^* d_{\lambda\mu}^J d_{\lambda\mu}^{J'} \right] \\ &\stackrel{(6.38c)}{=} \frac{\pi}{p^2} \sum_{J, \lambda_3, \lambda_4} (2J+1) |T_\lambda^J|^2 \\ \Im f(\theta=0) &= \frac{1}{2p} \sum_J (2J+1) \Im T_\lambda^J d_{\lambda\mu}^J(0) \stackrel{(6.57b)}{=} \frac{1}{4p} \sum_{J, \lambda_3, \lambda_4} (2J+1) |T_\lambda^J|^2 = \frac{p}{4\pi} \sigma_{TOT} \end{aligned}$$

ここで、 $d_{\lambda\mu}^J(0) = 1$ を使った。

6.5

1. 終状態の粒子スピンはゼロであるから、軌道角運動量 ℓ が全角運動量となる。角運動量保存則から $\ell = 0$ 。終状態パリティは $P = P_1 P_2 (-1)^\ell$ で、同一粒子であることにより $P_1 = P_2$ 、従って $P = +$ 。パリティ保存則より始状態パリティもプラス。
2. 始状態の静止系で考える。フォトンの飛来方向をスピ量子化の軸にとると、軌道角運動量の z 成分が 0 でフォトンには常にヘリシティ ± 1 を持つから、角運動量 z 成分が保存しない。
3. 0^- と 0^- の軌道角運動量を ℓ 、その重心系と 1^- の相対軌道角運動量を L とすると、 $\vec{\ell} + \vec{L} = \vec{J} = 0$ 、従って $\ell = L$ 。パリティは $(-1)^3 (-1)^{\ell+L} = -$ 。すなわち、パリティ、角運動量の保存則を充たす。

4. 全角運動量の保存則 $\vec{\ell} + \vec{\tau} = \vec{\tau}$ より、 $\ell = 0, 1, 2$ 。パリティは $P = (-1)^2(-1)^\ell$ なので、 $\ell = 1$ は保存則を充たす。
5. 遅いと言う条件から、 π は静止してから反応するので、軌道角運動量は 0 と見て良い。重水素は陽子と中性子の $S(\ell = 0)$ 状態と $P(\ell = 2)$ 状態の混合であり、スピンパリティ $J^P = 1^+$ であるので、始状態の全角運動量は 1、パリティは - となる。終状態では、中性子 2 個が同一粒子であるので全波動関数は反対称。中性子のスピン S とすると、スピン波動関数は $S = 1$ なら対称、 $S = 0$ なら反対称となり、軌道角運動量 ℓ はそれぞれに対応して、奇数もしくは偶数となる。2 中性子系と π の相対角運動量を L とすれば、 $P = -(-1)^{\ell+L}$ であるから、パリティ保存則から、許される ℓ, L の組み合わせは $\ell + L =$ 偶数に限られる。 $S = 1$ の場合、 ℓ は奇数であるから、 $L = 0$ はパリティ保存則を破る。 $S = 0$ の場合、 $\ell = 0, 2, \dots$ なので、 $L = 0$ との組み合わせで全角運動量も偶数となり、角運動量保存則を充たさない。

6.6

1. 2 個の π^0 は同一粒子であるので全波動関数は対称。すなわち ℓ は偶数。一方角運動量保存則より ℓ は 1 でなければならず、条件は両立しない。
2. ポジトロニウムは電子陽電子の対の束縛状態であるから、 C パリティは $(-1)^{L+S}$ 。 $S = 0, 1$ に対応してそれぞれ +、- となるので、 $2\gamma, 3\gamma$ 崩壊が許される状態となる。パリティ、角運動量保存則には矛盾しない条件があることも示せる。
3. 始状態軌道角運動量は 0 と見て良い。従って $P = -, C = (-1)^S$ 。一方終状態は 2 個のスピン 0 の同一ボソンであるから $J = \ell$ は偶数。従って $P = +$ でパリティ保存則を破る。

6.7

マクスウエルの方程式より $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -j^\nu$ であるから、 A^ν と j^ν の変換性は同一。

古典的に考えれば $j^\nu = (\rho; \rho\mathbf{v})$ であるから、 $A^0(-t) = A^0(t), \mathbf{A}'(-t) = -\mathbf{A}(t)$ 。

場の理論での j^ν の変換性については (6.142b), (6.149) を参照せよ。

$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ より、 \mathbf{E}, \mathbf{B} の変換性が導ける。

6.8

(6.125) から、

$$T\chi_+ = -i\sigma_2\chi_+^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{1}{2}\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{1}{2}\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{1}{2}\phi} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{1}{2}\phi} \end{pmatrix} = \chi_-$$

同様に

$$T\chi_- = -\chi_+$$

6.9

偏極核を使いベータ崩壊から引き続き γ 線が放出される反応を利用する。核子のスピン演算子を \mathbf{J} 、電子、 γ の運動量をそれぞれ \mathbf{p}, \mathbf{k} とすれば、 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{p} \times \mathbf{k} = \mathbf{J} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}$ 項の存在は、核偏極軸 \mathbf{J} と電子の作る平面の左右で γ の放出頻度が異なることを意味する。同様に μ のスピンを σ 、 μ と π の運動量をそれぞれ \mathbf{p}, \mathbf{k} とすれば、 $\sigma \cdot \mathbf{p} \times \mathbf{k}$ は、 μ と π の作る平面に垂直にミューオンが偏極していることを意味するから、ミューオンからの崩壊電子のこの平面に対する上下非対称性が時間反転不変性の破れの証拠となる。

6.10

$|pd\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ であり ${}^3H\pi^+, {}^3H_e\pi^0$ から作るアイソスピン状態 $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ は、(6.184) で $p, n \rightarrow {}^3H_e, {}^3H$ として得られる。

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} {}^3H\pi^+ - \sqrt{\frac{1}{3}} {}^3H_e\pi^0$$

${}^3H\pi^+$ と ${}^3H_e\pi^0$ の係数を比較すれば、答えを得る。

6.11

K と Σ の作るアイソスピン状態は、 p, n と π の作るアイソスピン状態と同一であるから、 a^+, a^0, a^- は式 (6.186) の

$$T(\frac{3}{2}), \quad \frac{\sqrt{2}}{3}\{T(\frac{3}{2}) - T(\frac{1}{2})\}, \quad \frac{1}{3}\{T(\frac{3}{2}) + 2T(\frac{1}{2})\}$$

に対応する。 $T(\frac{3}{2}), T(\frac{1}{2})$ を消去すれば望みの式を得る。

6.12

$\frac{\vec{1}}{2} + \frac{\vec{1}}{2} = \vec{1}, 0$ の合成則は次式で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |11\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |00\rangle) \\ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |00\rangle) \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |-1-1\rangle \end{array} \right.$$

$T_1 \equiv \langle 1k|T|1k\rangle$, $T_0 \equiv \langle 00|T|00\rangle$ を定義すると

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv K^- n \rightarrow K^0 \Xi^- \sim -\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \rightarrow \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = -T_1 \\ f_2 &\equiv K^- p \rightarrow K^+ \Xi^- \sim -\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \rightarrow \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2}(T_1 - T_0) \\ f_3 &\equiv K^- p \rightarrow K^0 \Xi^0 \sim -\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \rightarrow \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2}(T_1 + T_0) \end{aligned}$$

$$\therefore f_1 = f_2 + f_3$$

6.13

$$pp = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad np = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad d\pi^+ = |11\rangle, \quad d\pi^0 = |10\rangle$$

であるので、前問から

$$T(pp \rightarrow d\pi^+) = T_1, \quad T(np \rightarrow d\pi^0) = \frac{1}{\sqrt{2}}T_1$$

が言える。

6.14

(6.183)、(6.184) より

$$\begin{aligned} \langle K^+ \Lambda | \pi^+ n \rangle &= \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | T [\sqrt{\frac{1}{3}} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle] = \sqrt{\frac{2}{3}} T(\frac{1}{2}) \\ \langle K^0 \Lambda^0 | \pi^- p \rangle &= \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | T [\sqrt{\frac{1}{3}} | \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle] = -\sqrt{\frac{2}{3}} T(\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\therefore d\sigma(\pi^+ n \rightarrow K^+ \Lambda^0) = d\sigma(\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda^0)$$

6.15

$\eta \rightarrow 2\gamma$ があることから $C_\eta = +$ 。6.3.1g 節の $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ と同じ議論から η のスピンパリティは $J^P = 0^+$ または 0^- 。 $\eta \rightarrow 3\pi$ から $\ell + L = 0$, $\therefore \ell = L$ 従ってパリティは $P = (-1)^3(-1)^{\ell+L} = -$

7 加速器と測定器

7.1

陽子の質量 0.938GeV を入れると

$$s \simeq \sqrt{2E_1 M} = \sqrt{2 \times 900 \times 0.938} \simeq 41.0\text{GeV}$$

7.2

r も n に従って大きくなるからスターリングの公式を使って書き直すと

$$W(r) \equiv \frac{n^r}{r!} e^{-n} \simeq \frac{n^r e^{-n}}{\sqrt{2\pi r^{r+1/2}}}$$

両辺の対数をとってテイラー展開をして第2項までをとる。

$$\begin{aligned}\log W(r) &= -\log \sqrt{2\pi} + r \log \frac{n}{r} - \frac{1}{2} \log r + r - n \\ &\simeq \log W(\mu) + \frac{\partial \log W(\mu)}{\partial r} (r - \mu) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log W(\mu)}{\partial r^2} (r - \mu)^2 + \dots\end{aligned}$$

μ を極大値とすると $\frac{\partial \log W}{\partial r}(\mu) = 0$ より

$$\mu = n, \quad W(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \quad \frac{\partial^2 \log W}{\partial r^2}(\mu) = -\frac{1}{n} \equiv -\frac{1}{\sigma^2}$$

もとに戻せば、

$$W(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(r-n)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma = n$$

を得る。