

4 宇宙における物質創成

我存在す。ゆえに C P の破れあり。

4.1 バリオン創成 (bario-genesis)

われわれの宇宙は物質「バリオン (陽子 + 中性子) と電子」でできており、反物質の量はごくわずかである。大統一理論発達以前の標準宇宙理論では、初期仮定として与えなければならなかったバリオン数非対称、すなわち宇宙初期、何らかの理由でバリオンの数 (B) が反バリオン (\bar{B}) よりわずかに多かったという事実^{*1)}

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{B - \bar{B}}{B} \sim \frac{n_B}{n_\gamma} \equiv \eta_B \simeq 6 \times 10^{-10} \quad (1)$$

は、大統一理論を使えば自然な帰結として説明できる。 $\Delta B/B$ の ΔB は今日宇宙に存在するバリオン数密度より推察できる。分母の B は、宇宙が熱平衡に合った初期におけるバリオン数密度であり、それは現在残っている宇宙背景輻射より計算可能な初期フォトン数密度 n_γ と同程度である。この非対称を説明するシナリオの中で、現在受け入れられている説明は、宇宙初期の大統一温度 ($T \sim 10^{15} \text{ GeV}$) から冷える際に、バリオン数非保存過程によりバリオン数過剰が発生したというものである。ただし、最初の提案はその後、電弱統一温度 ($\sim 1 \text{ TeV}$) の相転移時にインスタントン効果により、バリオン数が保存せず、一度作られたバリオン数非対称が完全に消えてしまうことがわかった。しかし、レプトン数との差 $B - L$ は保存するので、今では大統一時にたとえば $SO(10)$ でレプトン数非対称が発生し、電弱相転移時にバリオン数非対称に転換されたという *Lepto-genesis* 説が有力である。しかし、レプトン-バリオン転換以外のメカニズムはバリオン数発生と同じであるので、以下は当初の大統一時バリオン数発生の議論で行う。

1967年にはサハロフ [1] が、ビッグバンから現在のバリオン過剰の物質宇宙を導くには、宇宙初期において物質が反物質よりわずかに (100 億個に対し 1 個) 過剰に生成されなければならないこと、そのためには C P 非保存効果が必要であることを示した。この宇宙におけるわれわれ自身の存在を保証する要因として、C P 対称性の破れは不可欠なのである。バリオン数過剰が生じるためには次の 3 条件が必要である。

物質創成のサハロフの条件

- (1) バリオン数保存を破る基本過程の存在
- (2) C P 非保存の存在
- (3) バリオン数を破る過程が進行中に熱平衡が破れる。

これらの条件が必要な理由を明らかにするために、ビッグバンの火の玉の中にある原始エネルギーの塊 (X ボソンと呼ぼう) を考える。非常に重い X ボソン (と反 X ボソン \bar{X}) がバリオン数 $B_1(\bar{B}_1)$ と $B_2(\bar{B}_2)$ で特徴付けられる過程に分岐比 $b(\bar{b})$ 及び $1 - b(1 - \bar{b})$ で崩壊すると仮定する。

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(X \rightarrow B_1)}{\Gamma(X \rightarrow All)} = b, & \quad \frac{\Gamma(X \rightarrow B_2)}{\Gamma(X \rightarrow All)} = 1 - b \\ \frac{\Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{B}_1)}{\Gamma(\bar{X} \rightarrow All)} = \bar{b}, & \quad \frac{\Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{B}_2)}{\Gamma(\bar{X} \rightarrow All)} = 1 - \bar{b} \end{aligned} \quad (2)$$

C P T 定理より

$$\Gamma(X \rightarrow All) = \Gamma(\bar{X} \rightarrow All) \quad (3)$$

^{*1)} $T \gg \Lambda_{QCD} \approx 200 \text{ MeV}$ ではバリオンはクォークに分解されているので、本当はクォーク数を扱うのが正しいが、歴史的な理由でバリオン数という名称をそのまま使う。

であるから、最初に X と \bar{X} の数が等しかったとすれば、バリオン数非対称は

$$\Delta B = (b - \bar{b})B_1 + \{(1 - b) - (1 - \bar{b})\}B_2 = (B_1 - B_2)(b - \bar{b}) \quad (4)$$

$B_1 \neq B_2$ は、バリオン数保存の破れを必要とし、 $b \neq \bar{b}$ は CP 非保存を意味する。条件 3 は次のようにして言える。CPT 保存とユニタリティのみを使い、

$$\sum_r \Gamma(B \rightarrow r) = \sum_{\bar{r}} \Gamma(\bar{B} \rightarrow \bar{r}) = \sum_r \Gamma(\bar{B} \rightarrow r) \quad (5)$$

が言える。第 2 式は CPT 保存から、第 3 式は全ての粒子についての和であるから r を \bar{r} で置き換えられる。上式に CPT 変換を施せば、

$$\sum_r \Gamma(r \rightarrow B) = \sum_r \Gamma(r \rightarrow \bar{B}) \quad (6)$$

熱平衡状態では全ての r 状態は同じ数だけあるから、仮に条件 (1) と (2) が満たされていても非対称は生じないのである。したがって宇宙の膨張により熱平衡が破れるという条件が不可欠なのである。具体的な数値はモデルに依存するが、大統一理論を使えば、バリオン数非保存と CP 非保存の妥当な値を使用して、今日存在するバリオン数を再現できるとされている [2]。ただし、現在の CP 実験値および小林-益川理論ではやや不足と見なされている。

4.2 元素合成 (nucleo-synthesis)[4]

4.3 熱平衡条件

宇宙初期、温度が $T \ll \Lambda_{QCD} \sim 200 \text{ MeV}$ 以下に下がると、前節で議論したわずかなクォークの生き残りの凝縮が起こり、ハドロン (バリオン) が形成される。しかし、温度が 10 MeV を大きく上回るときは、陽子と中性子は遊離しており、自由粒子として飛び回っている。温度が原子核の結合エネルギー程度 (数 $\text{MeV}/\text{核子}$) に下がってくると、元素合成が行われるようになる。陽子 p と中性子 n から原子核 A を合成するときの熱平衡式は

$$Zp + (A - Z)n \leftrightarrow A \quad (7)$$

である。原子核は自由核子より束縛エネルギー (BE) 分だけ質量が小さいので、温度が低い時 ($T \ll BE$) は、反応は一方的に右方向に進む。温度が高い時 ($T \gg BE$) は左方向の逆反応も同じ程度に起き熱平衡状態となる。ただし、膨張宇宙では同時に、反応率 Γ が膨張率 H に比べて大きくないと粒子は熱衝突する前に拡散してしまうので

$$\Gamma \gg H \quad (8)$$

もまた熱平衡が成り立つための必要条件である。このとき、化学ポテンシャルについては $\mu_A = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n$ が成立する。従って

$$e^{\mu_A/T} = e^{\{Z\mu_p + (A - Z)\mu_n\}/T} \quad (9)$$

ここで、バリオン数 n_B を

$$n_B = n_n + n_p + \sum_A A n_A \equiv n_\gamma \eta_B = \eta_B \left[\frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \right] \quad (10)$$

と表す。最後の式は (40b) 参照。次に各粒子のバリオン数に対する重量比を

$$X_A = \frac{A n_A}{n_B}, \quad X_p = \frac{n_p}{n_B}, \quad X_n = \frac{n_n}{n_B} \quad (11)$$

で定義する。各粒子の温度 T における数密度 (42a)

$$n_k = g_k \left[\frac{mT}{2\pi} \right]^{3/2} e^{(\mu-m)/T} \quad (12)$$

を入れて、化学ポテンシャルを消去すれば

$$X_A = \frac{g_A}{2^A} A^{5/2} X_p^Z X_n^{A-Z} \left[n_B \left(\frac{2\pi}{m_N T} \right)^{3/2} e^{B_A/[(A-1)T]} \right]^{A-1} \quad (13a)$$

$$B_A = Zm_p + (A-Z)m_n - m_A \quad (13b)$$

を得る。[...]^{A-1} の中の指数関数の係数は、 $n_B = n_\gamma \eta_B \simeq 5 \times 10^{-10} (2\zeta(3)/\pi^2) T^3$ を入れて計算すると、

$$\sim 3.74 \times 10^{-12} \left(\frac{T}{\text{MeV}} \right)^{3/2} \ll 1 \quad (14)$$

となって、 $B_A/[(A-1)T]$ 因子により指数関数がこの数を相殺する低温 ($T \sim 1 - 0.1 \text{ MeV}$) になるまでは元素合成が進まない。以下、もう少し系統的に段階を追ってみよう。

輻射優勢の時代には、全輻射エネルギー、温度、時間の間には次の関係式が成り立つから (式 (71) 参照)、

$$\rho_{rad} = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 = \frac{3}{32\pi G} t^{-2} \quad (15)$$

温度と時間の関係が判る。値を入れれば、 $T < m_\mu$ では良い近似で

$$T \simeq \frac{1 \text{ MeV}}{(t/\text{秒})^{1/2}} \simeq \frac{10^{10} \text{ K}}{(t/\text{秒})^{1/2}} \quad (16)$$

が成り立つ。

第 1 段階 : $T \gg 10 \text{ MeV}$, $t \ll 1 \text{ 秒}$

この時期、ニュートリノ、電子、陽電子は相対論的であり、豊富に存在するが、バリオンの数はわずかである。この段階では弱い相互作用と電磁相互作用による反応で熱平衡が成立している。バリオン数が非常に少ないので強い相互作用反応は起こらない。

$$\nu_e + n \leftrightarrow e^- + p \quad (17a)$$

$$\bar{\nu}_e + p \leftrightarrow e^+ + n \quad (17b)$$

$$\nu_e + \bar{\nu}_e \leftrightarrow e^- + e^+ \quad (17c)$$

$$e^- + e^+ \leftrightarrow \gamma + \gamma \quad (17d)$$

弱い相互作用反応率 $\Gamma_w \sim G_F^2 T^5$ が、宇宙膨張速度 (H) より遅くなる温度を当たってみると

$$\Gamma_w \sim G_F^2 T^5 \simeq H \simeq \sqrt{g_*} G T^2 \sim \frac{T^2}{m_{Pl}} \quad (18)$$

ここで、

$$G_F = 1.1664 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}, \quad m_{Pl} = 1.221 \times 10^{19} \text{ GeV} \quad (19)$$

を入れると

$$T \sim \frac{1}{\sqrt[3]{G_F^2 m_{Pl}}} \sim 1 \text{ MeV} \quad (20)$$

を得る。種々の反応を全て取り入れたより詳しい計算によれば、 $T \sim 0.72 \text{ MeV}$ である。従って $T \gg 10 \text{ MeV}$ では、弱い相互作用反応率が十分高く熱平衡が成立している。

反応 (17a) を考えると、化学ポテンシャル間には

$$\mu_\nu + \mu_n = \mu_e + \mu_p \quad (21)$$

が成立する。レプトンの化学ポテンシャルは無視できる。なぜならば、宇宙は電氣的に中性とすれば、

$$n(e^-) = n(e^+) + n_p \quad (22)$$

が成立し、また式 (17d) より $\mu(e^+) + \mu(e^-) = 0$ が成立する。従って

$$\frac{n(e^-)}{n(e^+)} = e^{\mu(e^-) - \mu(e^+)} \sim 1 + \frac{n_p}{n(e^+)} \sim 1 + \eta_B \quad (23)$$

から、 $2\mu_e/T \sim \eta_B$ となって無視できることが判る。ニュートリノについては推測するしかないが、電子と同じと考えればやはり無視できるであろう。レプトンの化学ポテンシャルを無視すれば

$$\frac{n_n}{n_p} = \frac{X_n}{X_p} = e^{-Q/T}, \quad Q = m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV} \quad (24)$$

$T \gg Q$ であるから

$$X_n = X_p = 0.5 \quad (25)$$

重水素については、式 (13a) で $A = 2$ とし、

$$g_D = 3, \quad B_D = m_p + m_n - m_D = 2.22 \text{ MeV} \quad (26)$$

を入れれば

$$X_D = 4.07 \times \left[\frac{T}{m_N} \right]^{3/2} \eta_B e^{2.22/T(\text{MeV})} \simeq 6 \times 10^{-12} \quad (27)$$

であるので、陽子や中性子に比べて重水素成分は無視できる。

第 2 段階 : $T \simeq 1 \text{ MeV}$, $t \simeq 1 \text{ 秒}$

$T \sim 0.72 \text{ MeV}$ で弱い相互作用による熱平衡反応が切り離される。ニュートリノは切り離されて現在も温度 $T_\nu \sim 2K$ の宇宙原始ニュートリノとして宇宙に充満しているはずである^{*2)}。その直後 $T \sim m_e/3$ に $e^- e^+ \rightarrow \gamma\gamma$ が一方的に進み、フォトン温度が上昇し $T_\gamma = (11/4)^{1/3} T_\nu$ となる。この時点で、

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-Q/T} \simeq \frac{1}{6}, \quad X_n \sim \frac{1}{7}, \quad X_p \sim \frac{6}{7}, \quad X_D \simeq 10^{-12} \quad (28)$$

である。重水素は合成されても、光分解反応 $\gamma + D \rightarrow p + n$ が圧倒的に優勢で数が増えない。トリチウムやヘリウムの数はさらに少ない。

^{*2)} ニュートリノは切り離されると、他の粒子と反応をしないので厳密に言えば熱平衡状態にはない。しかし、切り離されたときの黒体輻射分布を維持したまま宇宙膨張に伴い温度のみが下がって行く。ニュートリノ温度はフォトン温度と $T_\nu = (4/11)^{1/3} T_\gamma$ の関係にあるから、現在温度は $\sim 1.92K$ で数密度はニュートリノ 1 種につき $110/\text{cm}^3$ 、3 種で $330/\text{cm}^3$ である。すなわち、ニュートリノはフォトン [(40b) 参照] に次いで宇宙に沢山存在する粒子である。

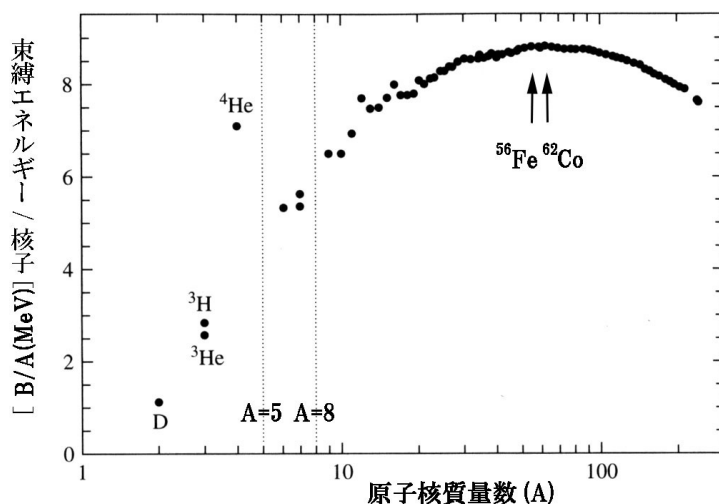
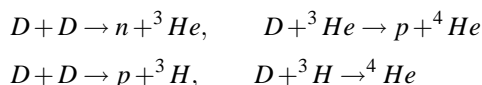


図1: 核子あたりの結合エネルギー。鉄、ニッケルの結合エネルギーが一番大きく最も安定な状態である。原子質量 $A = 5, 8$ に穴が空いていることに注意しよう。

第3段階 : $T = 0.3 \text{ MeV} \rightarrow 0.1 \text{ MeV}$, $t = 1 \text{ 秒} \rightarrow 3 \text{ 分}$: この段階では、重水素やそれより重い核は、反応速度は十分大きいものの合成のための材料の数が少なくて [(13a) の $n_B \sim \eta_B^{A-1}$ 因子]、合成される核子の数は増えない。この間、中性子は平均寿命 $885.7 \pm 0.8 \text{ sec}$ で崩壊してゆく。 $T = 0.07 \text{ MeV}$ になると温度が十分低くなり、軽い核の中では結合エネルギーの大きく ($B(\text{He}) = 28.3 \text{ MeV}$) 安定なヘリウムを作る反応



が一方的にかつ急速に進む。ヘリウムより重くて安定な核も存在するが、 $A = 5, 8$ の安定核がないこと、素材となる軽い核の数がそもそも少ないこと、温度が低くなるとクーロン障壁が大きくなるなどの理由で、それ以上重い核が合成されることはない。これら時間発展の様子を図2の左図に示す [3]。最終的に落ち着く値と観測値との比較を図2に示す。ヘリウムが合成される段階での中性子(陽子)の数を $n(p)$ とすると n/p は $\sim 1/7$ である。これからヘリウム成分の重量比は

$$X_{\text{He}} = \frac{4(n/p)}{n+p} = \frac{2(n/p)}{1+n/p} = \frac{2/7}{8/7} \simeq \frac{1}{4} \quad (30)$$

となる。宇宙の元素組成の75%が水素で25%がヘリウムであることは観測に裏付けられている。ビッグバン元素合成の提唱者ガモフは、当初ビッグバン時に全ての元素が作られると提案したが [5]、今日では、ヘリウムより重い元素は星の中で、また超新星として爆発する際に作られることが知られている。ビッグバン時に作られるのは軽い元素のみである。重水素(D)やヘリウム3(${}^3\text{He}$)、 ${}^7\text{Li}$ は作られるが圧倒的に少ない。しかし、このわずかな量を上記のシナリオを精密化して計算した値が、観測値をよく再現したことでビッグバン宇宙論の信頼性を大いに高めた。

調整すべきパラメーターはほとんど $\eta = n_B/n_\gamma$ のみであり、宇宙におけるバリオン全成分を精度良く決めた。

$$\Omega_B h^2 = 0.016 \pm 0.004^{*3)} \quad \rightarrow \quad \Omega_B \simeq 0.031 \quad (31a)$$

$$\eta_B = \frac{n_B}{n_\gamma} = 2.75 \times 10^{-8} \Omega_B h^2 = 3 \pm 1 \times 10^{-10} \quad (31b)$$

*3) $\Omega_B = \rho_B/\rho_c = n_B m_B/\rho_c = n_\gamma \eta_B m_B/\rho_c$, $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{ g/cm}^3$ は臨界密度を表す。

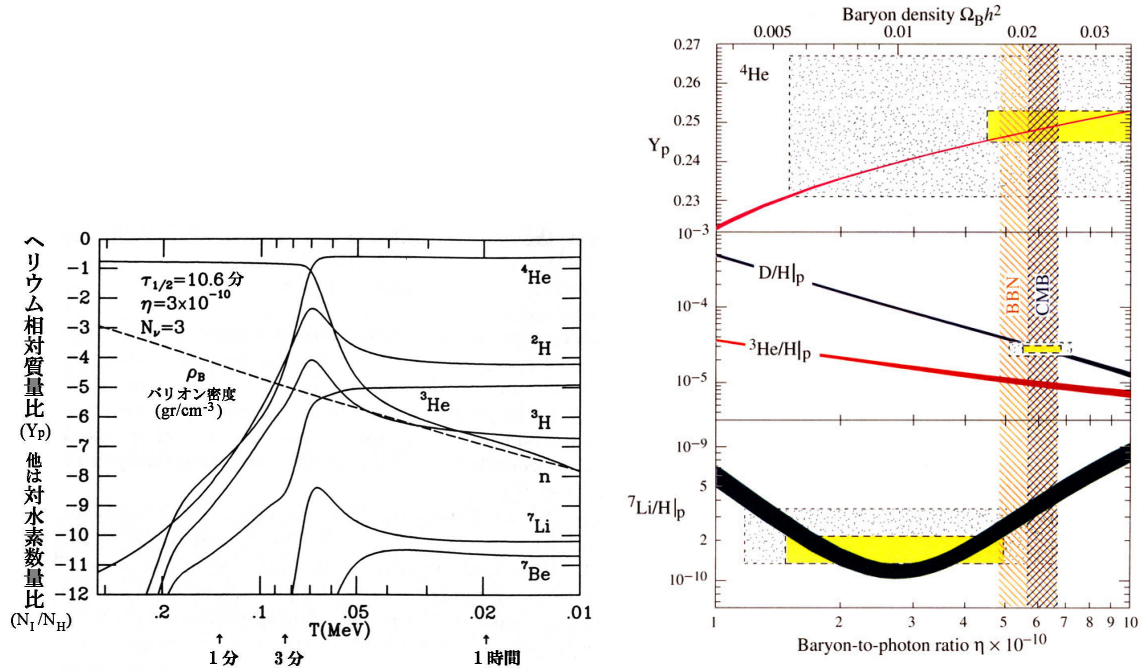


図 2: 元素合成が進展する様子。横軸は温度であるが、矢印を付けたところは時刻 (1 分、3 分、1 時間) も示してある。縦軸は水素に対する成分比。
右図は軽元素組成の理論値 (BBN)[4] と観測値 (黄色い四角形)。 $\eta \sim 4 - 5 \times 10^{-10}$ (グレーの斜線帯) は、背景輻射 (CMB) より決められた値 $\eta \sim 6 \times 10^{-10}$ (クロスハッチの帯) より若干小さいが良く合っている。

4.4 補足 1 : 熱力学基本公式

ボルツマン定数 $k = 1$ および自然単位を使う。

$$n (\text{数密度}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{p}) d^3 p \quad (32)$$

$$\rho (\text{エネルギー密度}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \epsilon f(\mathbf{p}) d^3 p \quad (33)$$

$$P (\text{圧力}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} f(\mathbf{p}) d^3 p = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{3\epsilon} f(\mathbf{p}) d^3 p \quad (34)$$

$$f(\mathbf{p}) = [\exp((\epsilon - \mu)/T) \pm 1]^{-1}, \quad \epsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (35)$$

g はスピン自由度であり、フォトンや電子は $g = 2$ である。± の符号はフェルミ・ディラック (FD) 統計およびボーズ・アインシュタイン (BE) 統計に対応する。 μ は化学ポテンシャルであり、化学的に平衡状態にある化学ポテンシャルの和は等しい。

$$i + j \leftrightarrow k + l \Rightarrow \mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l \quad (36)$$

化学ポテンシャルは、粒子数密度やエネルギー密度が判れば決められる。フォトンの化学ポテンシャルはゼロである^{*4)}。粒子の化学ポテンシャル (μ_-) と反粒子の化学ポテンシャル (μ_+) に違いがあると、粒子数と反粒子数に差が出るが、初期宇宙の粒子数の非対称度は小さいので、 $\mu_- = \mu_+$ として良い。

*4) 理由 1 : 初期宇宙では、 $e^- + e^+ \leftrightarrow 2\gamma$ で、粒子数非対称は非常に小さい ($\sim 10^{-9}$)。
理由 2 : 背景輻射の観測スペクトルから、 $\mu < 9 \times 10^{-6}$ が言える。D.J.Fixsen et al.: Astro. Phys. J. **473** (1996), 576

相対論的粒子($T \gg m, \epsilon \gg m$)

相対論非縮退 ($T \gg \mu$)

$$n = g \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \times \begin{cases} 1 & : BE \\ 3/4 & : FD \end{cases} \quad \zeta(3) = 1.202 \dots \quad \zeta(s) \text{ はゼータ関数} \quad (37)$$

$$\rho = g \frac{\pi^2}{30} T^4 \times \begin{cases} 1 & : BE \\ 7/8 & : FD \end{cases} \quad (38)$$

$$P = \frac{\rho}{3} \quad (39)$$

宇宙マイクロ波： 上記公式に観測値を入れると、温度、数密度、エネルギー密度は

$$T_\gamma = 2.725 \pm 0.001 \quad (40a)$$

$$n_\gamma = 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 = 410.4 \pm 0.5 / \text{cm}^3 \quad (40b)$$

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T^4 = 0.261 \text{eV} / \text{cm}^3 \quad (40c)$$

相対論縮退($T \ll \mu$)

$$n = \frac{1}{6\pi^2} g \mu^3 \quad (41a)$$

$$\rho = \frac{1}{8\pi^2} g \mu^4 \quad (41b)$$

$$P = \frac{\rho}{3} \quad (41c)$$

非相対論的粒子($T \ll m, \epsilon \ll m$)(BE, FD)

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T} \quad (42a)$$

$$\rho = nm \quad (42b)$$

$$P = nT \ll \rho \quad (42c)$$

フェルミオン粒子の統計的非対称

$$n_+ - n_- = 2g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \sinh\left(\frac{\mu}{T}\right) e^{-m/T} \quad T \ll \mu, \quad \text{Note: } \mu_+ = \mu_- \quad \text{for } q + \bar{q} \leftrightarrow \gamma + \gamma \quad (43)$$

エントロピー

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (44)$$

$$s = \frac{S}{V} = \frac{\rho - \mu n + P}{T} \quad (45)$$

4.5 補足2：フリードマン方程式と宇宙の時間変化

4.5.1 宇宙の計量と光の赤方遷移

宇宙空間は一様かつ等方的であるという宇宙原理を要求すると、宇宙空間の計量は、

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (46)$$

と表される。これをロバートソン・ウォーカーの計量という。a(t) は時間と共に膨張する宇宙のスケールを表す因子で、長さの次元を持つ。k は空間の曲率を表す (k= +1 閉じた宇宙、k= 0 平坦宇宙、k=-1 開いた宇宙)^{*5)}。ここで、

$$d\eta(t) = \frac{dt}{a(t)}, \quad \ell(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (47)$$

を定義する。η は共形時間 (conformal time) と呼ばれる量である。ℓ(r) は原点 (地球) から r 地点までの実際の長さ (測地線) である。光の行路は $ds^2 = 0$ で与えられるから、

$$\eta(t_0) - \eta(t) = \ell(r) \quad (48)$$

(r, θ, φ) を共動座標という。宇宙を議論するときは、まず宇宙が静止しているものとして共動座標で計算すれば、宇宙膨張の効果 (実際の座標値) は共同座標での値に a(t) をかけて得られる。共動座標 $r = r$ から時刻 $t \sim t + \delta t$ に発射された光を、 $r = 0$ で時刻 $t_0 \sim t_0 + \delta t_0$ に受け取ったとすれば、(48) の右辺は時刻によらないから、

$$\delta\eta(t_0) = \delta\eta(t) \Rightarrow \frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t}{a(t)} \quad (49)$$

光の波長と振動数を λ と ν と書き、δt として 1/ν をとれば

$$\nu a(t) = \nu_0 a(t_0) \equiv \nu_0 a_0 \quad (50)$$

$$\therefore \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 1+z = \frac{a_0}{a(t)} \quad (51)$$

このことは、遠方にある銀河から発せられる光は、銀河の固有速度 (peculiar velocity) を無視すれば常に赤方に ($\lambda_0 > \lambda$) に遷移する。上式から判るように赤方遷移 (1+z) は、光が放射された時点での宇宙のサイズ (より正確にはスケール) に反比例する。

4.5.2 フリードマン方程式

一般相対論方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^3}T_{\mu\nu} \quad (52)$$

にロバートソン・ウォーカー計量を入れて書き下ろすと、次の3式が得られる。

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad \text{フリードマン方程式} \quad (53)$$

$$d(\rho V) + PdV = 0 \quad \text{エネルギー保存式} \quad (54)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad \text{宇宙加速の方程式} \quad (55)$$

$H = \dot{a}/a$ はハッブル定数 (実際は時間の関数) で、宇宙の膨張率を表す。G は重力定数、ρ はエネルギー密度、Λ は宇宙項と呼ばれる。式 (53) をフリードマン方程式と言う。アインシュタイン方程式から得られるのは、(53)(55) である。式 (54) は熱力学の第1法則を表し、一般相対論とは独立に得られるので、以後この式をエネルギー保存則ということにする。第3式は加速度 (減速度) を表す式である。この3式は独立ではなく、例えば (55) は (53) と (54) から導ける。なお、第3式はニュートンの万有引力の式の拡張となっている。書き換えると

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -G\frac{M}{a^2}, \quad M = \frac{1}{c^2} \left(\rho + 3P - \frac{\Lambda c^4}{4\pi G} \right) \frac{4\pi}{3} a^3 \quad (56)$$

^{*5)} 宇宙論ではスケールや座標値の絶対値はあまり使う必要がないので、r を適当にスケールして、慣用的に $k = \pm 1, 0$ とする。k = $-\Omega_k(a_0H_0/c)^2$, $\Omega_k = O(1)$ であるから、もし、r の座標値として現時点での長さを使えば、 $a_0 = a(t=0) = 1$ 、 $k \sim 1/R^2$, $R = c/H_0 \sim 140$ 億光年となる。R は現在の宇宙の大きさを表す量である。従って宇宙スケールの議論をするのでない限り、 kr^2 は 1 に比べて小さい量である。天体物理では、たとえ銀河団スケールでも宇宙の曲率は無視できる。

第1項 ρ/c^2 が質量密度でニュートンの万有引力を表すが、一般相対論では圧力も重力に寄与すること、そして宇宙項=斥力(反重力)をも含むことが判る。なお、宇宙項を

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (57)$$

で定義される真空エネルギー密度で置き換えて、エネルギー密度を次式で

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda \quad (58)$$

再定義すると見通しが良くなることもある。 ρ_m は物質 ($p \ll m$)、 ρ_r は輻射 ($p \gg m$) エネルギー密度を表す。この定義による真空エネルギーが負の圧力 ($P = -\rho_\Lambda$) を持つことは、フリードマン方程式と加速の方程式を比較すれば判るであろう。

演習問題 4.1. 真空エネルギー密度は場所によらず常に一定である。圧力のする仕事を考察して、真空エネルギーが負の圧力 ($P = -\rho_\Lambda$) を持つことを示せ。

現時刻においてはハッブル定数は測定されていて、

$$H_0 = H(t=0) = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = h \times (9.77813 \text{ Gyr})^{-1}, \quad h = 0.73^{+0.04}_{-0.03} \quad (59a)$$

$$1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc}, \quad 1 \text{ pc} = 3.262 \text{ ly} \quad (59b)$$

宇宙項が無い場合、 $Mc^2 = (4\pi/3)(\rho a^3)$ と置いてフリードマン方程式を変形すると

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - G \frac{M}{a} = -\frac{kc^2}{2} \quad (60)$$

となる。これは重力下における質量1を持つ粒子のニュートン運動方程式を表す。膨張速度は質点の脱出速度で置き換えられるので、その振る舞いが容易に判る。左辺がゼロとなる密度を臨界密度といい ρ_c と表す。

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G} = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 10.54 h^2 \text{ keV cm}^{-3} \quad (61)$$

ρ_c で規格化したエネルギー密度を $\Omega \equiv \rho/\rho_c$ で記す。宇宙項がない場合は、 $\Omega \geq 1 \leftrightarrow k \geq 0$ が対応し、 $k < 0$ (開いた宇宙) では永遠膨張、 $k > 0$ (閉じた宇宙) では宇宙はやがて収縮に転じる。 $k = 0$ (平坦宇宙) では永遠膨張であるが膨張速度はゼロに近づく。宇宙項があれば、いずれは宇宙項が優勢になるので加速膨張(式(69))となる。時刻ゼロのフリードマン方程式を H_0^2 で割ると

$$1 - \Omega_k = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda, \quad \Omega_k \equiv -\frac{kc^2}{H_0^2 a_0^2} \quad (62)$$

インフレーション理論では宇宙の曲率はゼロ ($\Omega_k = 0$) であるので、全宇宙エネルギー密度の和は臨界密度に等しくなければならない。また、臨界密度 ρ_c は宇宙の運動エネルギー密度と解釈できる量であるから、フリードマン方程式によれば、宇宙の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは等しいという言い方もできる。

4.5.3 宇宙の時間変化

宇宙の成長速度 宇宙の時間変化は、フリードマン方程式(53)、エネルギー保存則(54)に熱力学の状態方程式が与えられればほぼ記述が可能である。ある時刻での数密度、エネルギー密度、状態方程式は

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{相対論的粒子=輻射} \\ \text{非相対論的粒子=物質} \\ \text{宇宙項=真空エネルギー} \end{array} \right. \begin{array}{l} n_r = g_{*r} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \\ \rho_r = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \\ N = \sum_k n_k V \text{ は保存, } \rho_m = \sum_k n_k m_k \\ \rho_{vac} = \text{定数} \end{array} \quad (63) \quad \text{状態方程式} \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{1}{3} \rho \\ P \simeq 0 \\ P = -\rho \end{array} \right. \quad (64)$$

で与えられる。 g_{*n}, g_* は、その時の温度で存在し得る粒子種についての自由度の総和である。おおざっぱに言えば、質量 m を持つ粒子・反粒子は、 $T > 2m$ で熱平衡状態にあり多数存在するが、 $T < 2m$ で消滅する。 $T \ll 1\text{MeV}$ では $g_* = 3.36$ である^{*6)}。宇宙論ではあまり細かい数字は問題にしないので、この節での議論では $g_* \sim g_{*n} = g_*(T \ll 1\text{MeV})$ として扱って十分である。

温度 T は宇宙のスケール a に反比例して減少する。

証明：エネルギー保存則 (54) を $V \propto a^3$ を使って書き換えると

$$\frac{d\rho}{\rho+P} + 3\frac{da}{a} = 0 \quad (65)$$

これに状態方程式 (64) を入れれば、エネルギー密度のスケール依存性が導ける。

$$\begin{cases} \rho_r \propto a^{-4} \\ \rho_m \propto a^{-3} \end{cases} \quad \rho_\Lambda = \text{constant} \quad (66)$$

これにエネルギー密度の温度依存性 §4.4 を入れると

$$\begin{cases} \rho_r \sim T^4 \sim \frac{1}{a^4} \\ \rho_m \sim T^3 \sim \frac{1}{a^3} \end{cases} \Rightarrow a \propto \frac{1}{T} \quad (\text{輻射、物質優勢時期}) \quad (67)$$

すなわち、温度はスケール a に反比例して下がって行く。時代を遡りスケール a を小さくすれば、フリードマン方程式 (53) の優勢項が変わる。曲率項は $\sim a^{-2}$ 、物質エネルギー密度は $\sim a^{-3}$ の様に振る舞うから、宇宙初期を議論するときは輻射エネルギー ($\sim a^{-4}$) に比べ無視できる。従って宇宙初期のフリードマン方程式は輻射エネルギーのみを考慮して

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_{\text{rad}} \quad (68)$$

と書ける^{*7)}。宇宙の歴史には、それぞれが宇宙エネルギー密度の大部分を占めた時期があった。その場合、フリードマン方程式はいずれにせよ (68) の形となるので、式は容易に解けて

$$a(t) \sim T^{-1} \sim \begin{cases} \sim \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{\text{vac}}t}\right) & \text{真空優勢} \\ \sim t^{1/2} & \text{輻射優勢} \\ \sim t^{2/3} & \text{物質優勢} \end{cases} \quad (69) \quad H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \begin{cases} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{\text{vac}}} & \text{真空優勢} \\ = \frac{1}{2t} & \text{輻射優勢} \\ = \frac{2}{3t} & \text{物質優勢} \end{cases} \quad (70)$$

宇宙初期輻射優勢の時代は、(70) を (68) に入れば

$$\rho_{\text{rad}} = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 = \frac{3}{32\pi G} t^{-2} \quad (71)$$

が成り立ち、温度と時間の関係が付く。

証明 4.1: 真空が負の圧力を持つことの証明

真空が断面積 S 、体積 V の管の中に閉じ込められているとしよう。エネルギーは $E = \rho_V V$ で与えられる。ここで、力 F を管壁に加えて、 Δx 動かした場合のエネルギー増加は、 $\Delta E = \rho_V \Delta x S$ となる (図を参照)。従って圧力 P は

$$P = \frac{F}{S} = -\frac{\Delta E}{\Delta x} = -\rho_V \quad (72)$$

^{*6)} フォトンと3種のニュートリノのみ。ただし、 $T_V = (4/11)^{1/3} T_\gamma$ の効果による補正が入る。

^{*7)} インフレーション時には真空エネルギーが優勢となるが、インフレーションが終わった後を考える。

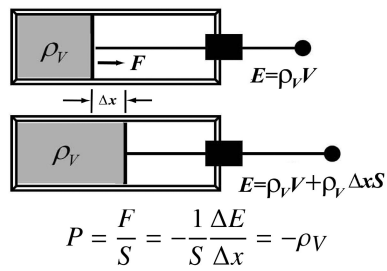


図 3: (真空エネルギーは負の圧力を持つ。)

参考文献

- [1] A.D.Sakharov, Pisma ZhETF, **5**(1967)32.
- [2] M.Yoshimura ; Phys. Rev. Lett., **41**(1978)281
- [3] Kolb and Turner; The Early Universe, Addison-Wesley Publishing Company, 1994
- [4] D.N.Schramm and M.S.Turner: Rev. Mod. Phys., **70** (1998) 303
- [5] G.Gamow: Phys. Rev., **73** (1948) 803
- [6] W.Hu and Dodelson: Cosmic Microwave Background Anisotropies, Annu. Rev. Astron. and Astrophys. **40** (2002) 1171-216